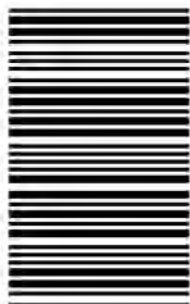


کد کنترل

460

C



460C

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته - سال ۱۴۰۴

عصر پنج‌شنبه

۱۴۰۳/۱۲/۰۲



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»
مقام معظم رهبری

علوم کامپیوتر (کد ۱۲۰۹) - شناور

مدت زمان پاسخگویی: ۲۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۳۰ سؤال

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۲۵	۱	۲۵
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱) و (۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۳۵	۲۶	۶۰
۳	ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه	۳۰	۶۱	۹۰
۴	مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها	۳۰	۹۱	۱۱۰
۵	ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات	۳۰	۱۱۱	۱۳۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- I have to say, I'm not particularly in my own understanding of the true nature of fear, even though I make my living drawing horror manga.
1) mutual 2) confident 3) possible 4) available
- 2- We must stop seeing nuclear as a dangerous problem and instead recognize it as a safe byproduct of carbon-free power.
1) missile 2) arsenal 3) conflict 4) waste
- 3- My father has always been with his money. I didn't have to pay for college or even for the confused year I spent at Princeton taking graduate courses in sociology.
1) generous 2) associated 3) content 4) confronted
- 4- Even though a cease-fire, in place since Friday, has brought temporary from the bombardment, the threat the strikes will return leaves people displaced yet again.
1) relief 2) suspense 3) rupture 4) resolution
- 5- What you'll hear, often, is that you should your dream; follow your passion; quit your job and live the life you want.
1) undermine 2) partake 3) pursue 4) jeopardize
- 6- Nationwide, poor children and adolescents are participating far less in sports and fitness activities than their more peers.
1) astute 2) otiose 3) impecunious 4) affluent
- 7- It is said that "the El" did not meet the historic criteria for being registered, as it the view from the street of other historic buildings and because the structure generally downgraded the quality of life in the city.
1) gentrified 2) revamped 3) impeded 4) galvanized

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The first step in the process of becoming an Olympic sport is(8) a sport from the International Olympic Committee (IOC). The IOC requires that the activity have

administration by an international nongovernmental organization that oversees at least one sport.(9), it then moves to International Sports Federation (IF) status. At that point, the international organization administering the sport must enforce the World Anti-Doping Code, including conducting effective out-of-competition tests on the sport's competitors while maintaining rules(10) forth by the Olympic Charter.

- 8- 1) to be a recognition as 2) recognition as
3) recognizing of 4) recognizing
- 9- 1) For a sport be recognized 2) Once a sport is recognized
3) A sport be recognized 4) A recognized sports
- 10- 1) set 2) sets 3) that set 4) which to be set

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

Human-computer interaction (HCI) has been the focus of attention for researchers in the past decade, with considerable work being done in the various modalities for communicating with a computer. Many interfaces, relying on body gestures, speech and brain computing, have been proposed or developed which assist humans to interact with robots in a more intelligent and natural way. Abstract thoughts and commands can be communicated to such interfaces more easily, which thereafter processes them intelligently, using past heuristics and concepts.

It is increasingly apparent that no single input modality can completely represent human thought and commands accurately, because an individual gesture can represent different concepts depending upon the context in which it is used. Thus, recognition of human gestures is mostly an ill-posed problem, since there might not be a unique solution (concept) for a detected gesture. To condition or improve the problem, we have to incorporate the context and semantic meaning of the gesture during the understanding stage. In this respect, multimodal interaction interfaces, which combine cues from different input modalities, can allow for a better representation of human intent and facilitate interaction with 'intelligent' computers, e.g. a household service robot.

- 11- The underlined word "assist" in paragraph 1 is closest in meaning to
1) aid 2) evaluate 3) fund 4) find
- 12- The underlined word "it" in paragraph 2 refers to
1) thought 2) individual 3) context 4) gesture
- 13- All of the following words are mentioned in the passage EXCEPT
1) natural 2) artificial 3) speech 4) condition
- 14- According to paragraph 2, the problem of recognition of human gestures can be improved by
1) employing multimodal interaction interfaces
2) finding a unique solution for a detected gesture
3) omitting the context and semantic meaning of the gesture
4) interacting with 'intelligent' computers, e.g. a robot

- 15- According to the passage, which of the following statements is true?
- 1) Regarding HCI, recognition of human gestures is not in fact a real problem.
 - 2) Definitely, a single input modality can completely represent human thought and commands accurately.
 - 3) Regardless of the context, individual gestures always represents the same concept.
 - 4) Probably, there is no single solution for a detected gesture when interacting with intelligent computers.

PASSAGE 2:

That part of mathematics which is usually called Set Theory encompasses two distinct groups of definitions and results. Firstly, we have those concepts (including that of an infinite set) which are necessary for the development of cardinal numbers and transfinite arithmetic. Such concepts were first introduced into mathematics by Georg Cantor. The second collection of concepts is of a more fundamental nature and deals with the problems of inclusion, membership and classification. It is the latter group which is so often taught as part of a “Modern Mathematics” course, whose development concerns us here. To distinguish between the two groups of concepts we will restore to the last mentioned collection its old name of *class theory*. To explain the origins of class theory we must go back to the Greeks.

The Greeks were the first to realize the close relationship between mathematics and logic. One of the most influential Greek texts on logic is the *Organon* of Aristotle (circa 300 BC). In this text he advances the thesis that it is possible to reduce every valid argument to the systematic application of a small number of rules which are independent of the subject of the argument. That is, he believed the validity of an argument was determined by its *form* rather than its *content*. (Such logic is known as *formal logic*). In the *Organon* he concentrated on a particular form of argument which he called a “syllogism”.

- 16- According to paragraph 1, the group of definitions and results which is often taught as part of a modern mathematics course is related to
- 1) what encompasses two distinct groups of definitions and results
 - 2) the development of cardinal numbers and transfinite arithmetic
 - 3) the problems of inclusion, membership and classification
 - 4) ideas that contradict those introduced by people like Cantor
- 17- According to paragraph 2, in the *Organon* Aristotle believed that
- 1) logical rules depend upon the subject of an argument
 - 2) the form of an argument is always inferior to its content
 - 3) the only true kind of logic was what he called formal logic
 - 4) the content of an argument is irrelevant in determining its validity
- 18- According to the passage, class theory is an older label for
- 1) that part of mathematics which is usually called Set Theory
 - 2) concepts which were first introduced into mathematics by Georg Cantor
 - 3) concepts of a more fundamental nature than those introduced by Cantor
 - 4) what philosophers usually call formal logic

- 19- According to the passage, which of the following statements is NOT true?
- 1) The approximate date of publication of Aristotle's *Organon* is known.
 - 2) The terms "formal logic" and "syllogism" were both invented by Aristotle.
 - 3) In formal logic, the form of an argument dominates its content.
 - 4) For Greeks, logic and mathematics were not quite independent of each other.
- 20- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?
- 1) When did Georg Cantor publish his work on set theory?
 - 2) How many books did Aristotle write on logic?
 - 3) What is an example of Aristotle's syllogism?
 - 4) Why is a specific branch of logic called formal logic?

PASSAGE 3:

In the sciences, mathematics is used to build a model of the observed reality. In physics, for example, scientists propose mathematical systems describing physical objects and phenomena pertaining to them. After accumulating data about planetary motion, Kepler formulated three mathematical laws which planetary motion satisfies. [1] Using these, he could simulate planets moving around a sun, predict the actual position of planets and verify properties such as "Using these laws of planetary motion, there is no way in which Mars will collide with Earth in the next million years."

Unlike these natural sciences, in computer science, we study artificial objects: computers, programs, programming languages, etc. Despite this there is no fundamental difference, in the sense that we would still like to have a model of these systems to reason mathematically about them. Will this program terminate? Does it give the right answer? Is this computer capable of performing this complex operation?

In programming, very frequently we have to represent complex structures. Imagine writing a program which has an internal representation of the map of the London Underground, chess game configurations or rules of English grammar. Describing these objects adequately requires the use of complex data structures. [2] Fortunately, objects such as the ones mentioned have been very well studied by mathematicians. [3] The mathematical way of describing such systems can then be readily translated into a data structure to be used in our programs. And just as we can use mathematics to guide the design of data structures, computer designers and computer scientists use mathematics to build circuits and computers, and design programming languages. [4]

- 21- The underlined word "pertaining" in paragraph 1 is closest in meaning to
- 1) presupposing
 - 2) associated
 - 3) autonomous
 - 4) postponing
- 22- Why does the author mention Kepler in paragraph 1?
- 1) To introduce a pioneer in the field of computer science
 - 2) To clarify his argument by providing a relevant example
 - 3) To mark the inapplicability of his theory about the movement of the planets
 - 4) To show that Mars may in fact collide with Earth in the next million years

- 23- According to the passage, the lack of a radical difference between the natural sciences and computer sciences is due to the fact that
- 1) in natural sciences, questions like 'Will this program terminate?' never occur to researchers
 - 2) in computer science, we study artificial objects, while the natural sciences deal with natural phenomena
 - 3) in both areas the existence of system models and mathematical reasoning about them is desirable
 - 4) in programming, we have to represent complex structures, whereas natural phenomena are usually simple
- 24- Which of the following is the best title for the passage?
- 1) The Uses of Mathematics in Computer Science
 - 2) Computer Science or Natural Science?
 - 3) Physics and Computer Programming: A Comparison
 - 4) The Uses of Computers in Mathematics
- 25- In which position marked by [1], [2], [3] and [4], can the following sentence best be inserted in the passage?
- Or rather, no mathematician studied the London Underground map, but many have studied graph theory, using which it is straightforward to describe the map of the London Underground.
- 1) [1] 2) [2] 3) [3] 4) [4]

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۲۶- دو معادله $z^n = 1 + i$ و $z^m = 1 - 2i$ به‌ازای کدام مقادیر طبیعی m و n دارای حداقل یک ریشهٔ یکسان هستند؟

(۱) $m = 5$ و $n = 4$

(۲) $m = 3$ و $n = 6$

(۳) $m = 7$ و $n = 3$

(۴) هیچ مقداری از m و n

۲۷- فرض کنید $f: (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ یک تابع پیوسته باشد. کدام عبارت درست است؟

(۱) اگر $\int_1^\infty f(x) dx$ همگرا باشد، $\int_1^\infty f^2(x) dx$ نیز همگرا است.

(۲) اگر $\int_1^\infty f^2(x) dx$ همگرا باشد، $\int_1^\infty f(x) dx$ نیز همگرا است.

(۳) اگر $\int_1^\infty f(x) dx$ همگرا باشد، $\int_1^\infty xf(x) dx$ نیز همگرا است.

(۴) اگر $\int_1^\infty f(x) dx$ همگرا باشد، $\int_1^\infty \frac{dx}{f(x)}$ نیز همگرا است.

۲۸- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر باشد. اگر به ازای هر $x > 0$ ، $f'(x) > g'(x)$ ، آنگاه برای هر $x > 0$ ، کدام مورد درست است؟

(۱) $f(x) > g(x)$

(۲) $f''(x) > g''(x)$

(۳) $f(x) - f(0) > g(x) - g(0)$

(۴) $f'(x) - f'(0) > g'(x) - g'(0)$

۲۹- اگر مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{n+kx}\right)$ موجود و برابر $f(x)$ باشد، آنگاه مقدار $f'(1)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{\ln 2}$

(۳) $\ln 2$

(۴) ۲

۳۰- مقدار $\int_0^1 (x \ln x)^{1403} dx$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{-1403!}{1403^{1404}}$

(۲) $\frac{-1403!}{1404^{1404}}$

(۳) $\frac{1403!}{1403^{1404}}$

(۴) $\frac{1404!}{1404^{1403}}$

۳۱- در کدام نقاط از صفحه مختصات، بردار گرادیان تابع $f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{x} + y\right)$ برابر $(1, -\frac{16}{9})$ است؟

(۱) $(\frac{3}{4}, \frac{7}{3}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{3})$

(۲) $(-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{3})$

(۳) $(\frac{3}{4}, \frac{7}{3}), (\frac{3}{4}, -\frac{1}{3})$

(۴) $(-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}), (\frac{3}{4}, -\frac{1}{3})$

۳۲- معادله صفحه مماس بر هذلولی وار یکپارچه $y \geq 0$ و $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ در کدام نقطه از این رویه، بر خط راست

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = 2 \end{cases} \text{ عمود است؟}$$

(۱) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$

(۲) $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

(۳) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, 0\right)$

(۴) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$

۳۳- ماکزیمم مطلق تابع $f(x, y, z) = x^2 - 2yz$ در مجموعه $\{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 3\}$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) $3\sqrt{2}$

(۳) ۴

(۴) $4\sqrt{2}$

۳۴- فرض کنید D یک ناحیه در صفحه مختصات باشد. ماکزیمم مقدار $\iint_D (1 - |x| - |y|) dx dy$. کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

۳۵- حجم حاصل از دوران ناحیه واقع در زیر منحنی $x = \cos^3 t$ و $y = \sin^3 t$ و بالای محور x ، حول محور x کدام است؟

(۱) $\frac{4\pi}{45}$

(۲) $\frac{8\pi}{45}$

(۳) $\frac{32\pi}{105}$

(۴) $\frac{16\pi}{105}$

۳۶- کدام گزاره درست است؟

$$(1) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Q} (x \leq y \Rightarrow x \leq y - \frac{1}{y})$$

$$(2) \exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{R} (x \leq y \Rightarrow x \leq y - \frac{1}{y})$$

$$(3) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} (x \leq y \Rightarrow x \leq y - \frac{1}{y})$$

$$(4) \exists x \in \mathbb{Q} \forall y \in \mathbb{R} (x \leq y \Rightarrow x \leq y - \frac{1}{y})$$

۳۷- فرض کنید A یک مجموعه n عضوی و B یک مجموعه m عضوی ($n < m$) است. چند تابع یک به یک از A به B وجود دارد؟

$$(1) m! \quad (2) \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$(3) \binom{m}{n} \quad (4) n!$$

۳۸- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}$. کدام گزینه برای رابطه دوتایی

R نادرست است؟

(1) هم‌ارزی نیست. (2) بازتابی (انعکاسی) و متقارن است.

(3) بازتابی (انعکاسی) و متعدی (ترایا) است. (4) متقارن و متعدی (ترایا) است.

۳۹- تابع $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ را با ضابطه $f(m, n) = \frac{3^m}{4^n}$ تعریف می‌کنیم، که در آن \mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی و \mathbb{Q}^+

مجموعه اعداد گویای مثبت است. کدام گزینه درست است؟

(1) f دوسویی است. (2) f نه یک به یک و نه پوشا است.

(3) f پوشا است ولی یک به یک نیست. (4) f یک به یک است ولی پوشا نیست.

۴۰- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ پوشا باشد. کدام حالت نمی‌تواند اتفاق بیفتد؟

(1) X شمارا و Y ناشمارا (2) X و Y هر دو شمارا

(3) X و Y هر دو ناشمارا (4) X شمارا و Y شمارا

۴۱- فرض کنید V فضای برداری ماتریس‌های 2×2 روی میدان اعداد حقیقی و P_2 فضای توابع چندجمله‌ای‌های از

درجه کمتر یا مساوی با ۲ است. تبدیل خطی $T: P_2 \rightarrow V$ با ضابطه $T(f) = \begin{bmatrix} f(1) - f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{bmatrix}$ تعریف شده

است. یک پایه برای فضای پوچ T کدام است؟

$$(1) \{1, x\}$$

$$(2) \{x^2 - 3x\}$$

$$(3) \{x - 1\}$$

$$(4) \{1, x, x^2\}$$

۴۲- فرض کنید $P_n[x]$ فضای برداری چندجمله‌ای‌هایی از درجه حداکثر n با ضرایب حقیقی روی میدان \mathbb{R} باشد. در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد تبدیل خطی $T: P_n[x] \rightarrow P_n[x]$ با ضابطه

$$T(f(x)) = \frac{1}{4}(f(x) + f(-x))$$

(۱) $\ker T = \mathbb{R}$

(۲) T پوشاست.

(۳) $\ker T \cap \text{Im} T = \{0\}$

(۴) $\text{Im} T$ مجموعه چندجمله‌ای‌های از درجه فرد $P_n[x]$ است.

۴۳- فرض کنید $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ در این صورت، مقادیر ویژه ماتریس A^{25} کدام است؟

(۱) ۱ و -۱

(۲) -۱

(۳) ۲ و -۲

(۴) ۱ و ۲

۴۴- رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 6 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) یک

(۲) دو

(۳) سه

(۴) صفر

۴۵- f و g دو تابع خطی روی \mathbb{R}^n هستند، به طوری که $\ker(f) \subseteq \ker(g)$. کدام یک از گزاره‌های زیر، درست است؟

(۱) $\ker(f) = \ker(g)$

(۲) $\text{rank}(f) \leq \text{rank}(g)$

(۳) f مضرب اسکالری از g است.

(۴) g مضرب اسکالری از f است.

۴۶- کدام گزینه برای دنباله $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ ، به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، درست است؟

(۱) صعودی و کران دار است.

(۲) صعودی است ولی کران دار نیست.

(۳) کران دار است ولی صعودی نیست.

(۴) نه کران دار و نه صعودی است.

۴۷- اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر به ازای هر $a \in A$ و هر $b \in B$ ، $a \leq b$ ، آنگاه $\sup A \leq \inf B$.

(۲) اگر به ازای هر $a \in A$ یک $b \in B$ یافت شود که $a \leq b$ ، آنگاه $\sup A \leq \sup B$.

(۳) اگر به ازای هر $b \in B$ یک $a \in A$ یافت شود که $a \leq b$ ، آنگاه $\inf A \leq \inf B$.

(۴) اگر به ازای هر $b \in B$ یک $a \in A$ یافت شود که $a \leq b$ ، آنگاه $\sup A \leq \sup B$.

۴۸- برای مجموعه $A = \left\{ \frac{n}{n+1} ; n \in \mathbb{N} \right\}$ در \mathbb{R} ، کدام گزینه درست است؟

(۱) بسته است.

(۲) نقطه حدی دارد.

(۳) هر نقطه A درونی است.

(۴) هر نقطه A تنهاست پس نقطه حدی ندارد.

۴۹- اگر تابع f در بازه $(-1, 1)$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ تعریف شده باشد، کدام گزینه برای مشتق پذیری تابع

$g(x) = x^2 f(x)$ در بازه $(-1, 1)$ ، درست است؟

(۱) همه جا مشتق پذیر است.

(۲) فقط در اعداد گویا مشتق پذیر است.

(۳) فقط در صفر مشتق پذیر است.

(۴) فقط در اعداد اصم (گنگ) مشتق پذیر است.

۵۰- فرض کنید تابع f روی \mathbb{R} پیوسته باشد. اگر $F(x) = \int_0^1 f(t+x) dt$ ، آنگاه $F'(x)$ ، کدام است؟

(۱) $f(x)$

(۲) $f'(x)$

(۳) $f(x+1)$

(۴) $f(x+1) - f(x)$

۵۱- فرض کنید در یک ماشین حساب که با استفاده از عمل گرد کردن، اعداد ماشینی را با چهار رقم اعشاری با ممیز

ثابت محاسبه می کند، بخواهیم سه عدد ماشینی $a = 3,4127 \times 10^2$ ، $b = 8,1316 \times 10^1$ و $c = 1,2417 \times 10^1$ را به

دو صورت $A \cong (a+b)+c$ و $B \cong a+(b+c)$ محاسبه کنیم. مقدار $A - B$ کدام است؟

(۱) $0,01$

(۲) صفر

(۳) $0,003$

(۴) $-0,01$

۵۲- مرتبه همگرایی دنباله بازگشتی $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3R)}{3x_n^2 + R}$ ، $x_0 > 0$ که به ازای عدد حقیقی و مثبت ثابت R ، برای

محاسبه \sqrt{R} استفاده می شود، کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۵۳- فرض کنید در روش تجزیه LU به روش محورگیری کامل برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، u_2 ستون دوم

ماتریس U باشد، به طوری که $PAQ = LU$ ، u_2 کدام است؟ (P و Q حاصل ضرب ماتریس‌های مقدماتی (جایگشتی) و عناصر قطری ماتریس L برابر ۱ هستند).

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1) \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3) \end{array}$$

۵۴- فرض کنید $f(x) = x(x^2 - 5x^2 + 4)$ ، $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $x = 0, \pm 1$ و $q(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $x = 0, 1, 3$ باشند. اگر $w(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $x = 0, \pm 1, 3$ باشد، مقدار $w(2)$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} \frac{p(2) - 3q(2)}{4} \quad (1) \\ \frac{3p(2) + q(2)}{4} \quad (2) \\ \frac{p(2)}{4} \quad (3) \\ \frac{3}{4}q(2) \quad (4) \end{array}$$

۵۵- برای محاسبه تقریبی از مقدار $\int_0^3 f(x) dx$ ، از دستور $\alpha f(0) + \beta f(2) + \gamma f(3)$ استفاده می‌کنیم، به طوری که

تقریب انتگرال برای چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه ۲ دقیق باشد. مقدار تقریبی $\int_0^3 x^3 dx$ با استفاده از دستور فوق کدام است؟

$$\begin{array}{l} 18 \quad (1) \\ \frac{79}{4} \quad (2) \\ 20 \quad (3) \\ \frac{81}{4} \quad (4) \end{array}$$

۵۶- برد مشاهدات یک نمونه تصادفی دوتایی برابر ۴ شده است. در مورد انحراف معیار آن چه می‌توان گفت؟

$$\begin{array}{l} \text{برابر } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1) \\ \text{برابر } 2\sqrt{2} \quad (2) \\ \text{کمتر از } 2\sqrt{2} \quad (3) \\ \text{کمتر از } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) \end{array}$$

۵۷- تاس سالمی پرتاب می‌شود، سپس سکه سالمی را به تعداد خال‌های ظاهر شده تاس پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک شیر ظاهر شود کدام مورد است؟

$$(1) \frac{10}{64}$$

$$(2) \frac{54}{64}$$

$$(3) \frac{21}{128}$$

$$(4) \frac{107}{128}$$

۵۸- برای عدد صحیح $m > 0$ حاصل $\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} \binom{m}{i}$ چقدر است؟

$$(1) \text{ صفر}$$

$$(2) 1$$

$$(3) -1$$

$$(4) 2$$

۵۹- در شهری با $n+1$ ساکن، شخصی شایعه‌ای را در مرحله اول به شخص دوم می‌گوید که آن شخص به نوبه خود در مرحله دوم آن را برای شخص سوم تکرار می‌کند و به همین ترتیب شایعه در بین ساکنان تا مرحله پنجم می‌شود. در هر مرحله گیرنده شایعه به طور تصادفی از بین n افراد موجود انتخاب می‌شود. احتمال اینکه شایعه ۳ بار بدون تکرار برای هیچ شخص، گفته شود، کدام است؟

$$(1) \frac{n!}{n^r (n-r)!}$$

$$(2) \frac{n!}{n^{r-1} (n-r+1)!}$$

$$(3) \frac{n!}{n^r (n-r+1)!}$$

$$(4) \frac{n!}{n^{r-1} (n-r)!}$$

۶۰- اگر E و F دو پیشامد باشند که $P(F) = \frac{1}{4} P(E)$ ، $P(E \cup F) = \frac{3}{4}$ ، و $P(E \cap F) < 1$ ، در این صورت کوتاه‌ترین

محدوده تغییرات $P(E)$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{2} \leq P(E) \leq \frac{3}{4}$$

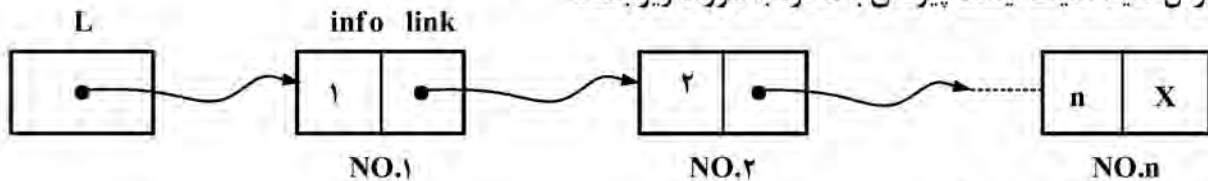
$$(2) 0 \leq P(E) \leq 1$$

$$(3) 0 \leq P(E) \leq \frac{1}{2}$$

$$(4) \frac{1}{2} \leq P(E) \leq 1$$

ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه:

۶۱- فرض کنید L یک لیست پیوندی با n گره به صورت زیر باشد.



قطعه کد زیر را در نظر بگیرید.

```
x = 0;
cur = L;
while (cur != NULL)
{
    cur1 = cur;
    while (cur1 != NULL) {
        x += cur1 -> info ;
        cur1 = cur1 -> link; }
    cur = cur -> link;
}
```

پس از اجرای این قطعه کد مقدار x کدام است؟

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (2)$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (3)$$

$$1 + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n^2 \quad (4)$$

۶۲- یک آرایه از اعداد صحیح به طول n و عدد x داده شده است. می‌خواهیم تعداد سه‌تایی‌هایی به فرم (i, j, k) که

$x = A[i] + A[j] + A[k]$ را بیابیم (آرایه ممکن است شامل اعداد منفی نیز باشد). پیچیدگی زمانی بهینه از چه

مرتبه‌ای است؟

$$n^2 \quad (2)$$

$$n \log n \quad (1)$$

$$n^2 \log n \quad (4)$$

$$n^3 \quad (3)$$

۶۳- فرض کنید یک لیست پیوندی یک‌طرفه داریم. می‌خواهیم گره دوم از انتها یعنی گره ماقبل آخر را حذف کنیم.

بهترین روش برای انجام این کار چیست؟

(۱) تبدیل لیست به آرایه و حذف گره

(۲) حرکت دادن یک اشاره‌گر تا انتهای لیست و شمارش گره‌ها

(۳) حرکت دادن یک اشاره‌گر با شمارنده تا موقعیت مطلوب

(۴) استفاده از دو اشاره‌گر که یکی دو گره جلوتر از دیگری است.

۶۴- فرض کنید یک پشته (Stack) پیاده‌سازی شده با استفاده از یک لیست پیوندی با عناصر یکتا داریم. این پشته دو عمل اصلی **push** و **pop** را پشتیبانی می‌کند. حال می‌خواهیم تابعی اضافه کنیم که عنصر مینیمم (کوچک‌ترین عنصر) موجود در پشته را در زمان ثابت $O(1)$ و بدون تغییر پشته برگرداند. کدام یک از روش‌های زیر بهترین راه برای انجام این کار است؟
 (۱) هر زمان که به تابع مینیمم نیاز داشتیم، پشته را مرتب کرده و اولین عنصر (کوچک‌ترین) را به دست می‌آوریم.
 (۲) در هر بار فراخوانی تابع مینیمم، تمامی عناصر لیست پیوندی را پیمایش کرده و کوچک‌ترین مقدار را پیدا کنید.
 (۳) از یک اشاره‌گر اضافی استفاده کنید که به کوچک‌ترین عنصر فعلی اشاره کند و در زمان هر عملیات **push** و **pop** این اشاره‌گر را به‌روزرسانی کنید.

(۴) یک پشته کمکی داشته باشید که در هر لحظه کوچک‌ترین عنصر پشته اصلی را ذخیره کند و در زمان انجام عملیات **push** و **pop** این پشته کمکی را به‌روزرسانی کنید.

۶۵- فرض کنید می‌خواهید یک داده‌ساختار طراحی کنید که هم‌زمان قابلیت‌های یک صف معمولی و یک صف اولویت (**Priority Queue**) را پشتیبانی کند. این داده‌ساختار باید بتواند عملیات‌های زیر را انجام دهد:
 - افزودن یک عنصر (**Enqueue (x,p)**): یک عنصر x با اولویت p به داده‌ساختار اضافه می‌شود.
 - حذف و بازگرداندن عنصر با بالاترین اولویت (**Dequeue Max**): عنصر با بیشترین مقدار اولویت حذف و بازگردانده می‌شود.

- حذف و بازگرداندن اولین عنصر (**Dequeue First**): اولین عنصری که وارد شده است، حذف و بازگردانده می‌شود.
 شما فقط می‌توانید از سه پشته (**Stacks**) برای پیاده‌سازی این داده‌ساختار استفاده کنید. اگر تعداد کل عناصر n باشد، بدترین پیچیدگی زمانی هر یک از عملیات‌های **Dequeue First** و **Dequeue Max** از چه مرتبه‌ای است؟
 (۱) n (۲) $n \log n$ (۳) $\log n$ (۴) 1

۶۶- فرض کنید می‌خواهیم یک عبارت ریاضی را که شامل پرانتزهای باز و بسته، عملکردهای ریاضی $(+, -, \times, /)$ و اعداد است، ارزیابی کنیم. عبارت به صورت یک پشته داده می‌شود. برای این کار از ترکیبی از پشته و صف استفاده می‌شود بدین صورت که:

- ابتدا از یک صف برای تبدیل عبارت ورودی به عبارت پسوندی (**Postfirst**) استفاده می‌شود.

- سپس از یک پشته برای محاسبه مقدار عبارت پسوندی استفاده می‌شود.

کدام روش زیر برای تبدیل عبارت ورودی به پسوندی مناسب‌تر است؟

(۱) ابتدا تمام عملگرها را در یک پشته ذخیره کنید و پس از پردازش تمام عبارت، آنها را به صف خروجی منتقل کنید.
 (۲) تمام عملگرها و پرانتزها را مستقیماً به صف خروجی منتقل کنید و از پشته برای هیچ بخشی از تبدیل استفاده نکنید.
 (۳) از یک صف برای ذخیره عملگرها استفاده کنید و هر زمان که پرانتز بسته مشاهده شد، عملگر را از صف خارج کنید.
 (۴) از یک پشته برای ذخیره عملگرها استفاده کنید و هر زمان که اولویت عملگر جدید کمتر یا مساوی عملگر موجود در پشته بود، عملگرهای پشته را به صف خروجی منتقل کنید.

۶۷- کدام یک از الگوریتم‌های مرتب‌سازی زیر پایدار (**Stable**) است؟

(۱) سریع (۲) درجی (۳) هرمی (۴) انتخابی

۶۸- در مورد الگوریتم هافمن کدام مورد درست است؟

(۱) حروف با فرکانس بیشتر دارای کدهای با طول بیشتر خواهند بود.
 (۲) حروف با فرکانس بیشتر دارای کدهای با طول کمتر خواهند بود.
 (۳) حروف با فرکانس کمتر دارای کدهای با طول کمتر خواهند بود.
 (۴) حروف با هر فرکانسی دارای کدهای یکسان هستند.

۶۹- مرتبه زمانی $T(n)$ کدام است؟

$$\begin{cases} T(1) = 5 \\ T(n) = n + 1 + T\left(\frac{n}{2}\right) \end{cases}$$

(۱) $n \cdot \log$

(۲) n

(۳) $\log n$

(۴) n^2

۷۰- n عدد صحیح k رقمی داریم (k ثابت و مستقل از n هست) کدام مورد دقیق تر است؟(۱) این اعداد را می توان در زمان $\theta(n)$ و با حافظه $O(n)$ مرتب کرد.(۲) این اعداد را می توان در زمان $\theta(n \log n)$ و با حافظه $\theta(n)$ مرتب کرد.(۳) مرتب سازی این اعداد به زمان $\theta(n)$ و حافظه $\Omega(n^2)$ احتیاج دارد.(۴) مرتب سازی این اعداد دست کم به زمان $\Omega(n \log n)$ و حافظه $\Omega(n)$ نیاز دارد.۷۱- فرض کنید $T(x) = \frac{1}{2}T\left(\frac{x}{2}\right) + \theta\left(\frac{1}{x}\right)$. پیچیدگی رابطه T کدام است؟

(۱) $\theta\left(\frac{\log x}{x}\right)$

(۲) $\theta(\log x)$

(۳) $\theta(x \log x)$

(۴) $\theta(x(\log x)^2)$

۷۲- فرض کنید L_n زیرمجموعه ای از $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ به صورت زیر باشد:

$$L_n = \{(i, j) \mid i + j \leq n, i \geq 0, j \geq 0\}$$

همچنین برای هر (i, j) در L_n مجموعه همسایه های (i, j) را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$N_n(i, j) = \{(k, m) \in L_n : 1 \leq |i - k| + |j - m| \leq 2\}$$

برای $n > 3$ اندازه مجموعه $N_n(i, j)$ چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

۷۳- یک گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ مدلی برای یک شبکه کامپیوتری با n رأس است. وزن یال (u, v) را با $w(u, v)$ نشان می‌دهیم که برابر با احتمال خرابی (قطع کامل) آن یال است. می‌خواهیم در این گراف احتمال خرابی قابل اعتمادترین مسیر از هر رأس i به هر رأس دیگر j را پیدا کنیم که مسیری با احتمال خرابی مینیمم است. فرض کنید که احتمال خرابی یال‌ها مستقل از هم هستند. می‌خواهیم از الگوریتم فلوید برای حل این مسئله استفاده کنیم. اگر P_{ij} احتمال خرابی یک مسیر بین دو رأس i و j با کمترین احتمال خرابی باشد، چه عبارتی در سطر (a) قرار گیرد تا الگوریتم درست عمل کند؟

```
for(k = 1 ; k <= n ; k++)
  for(i = 1 ; i <= n ; i++)
    for(j = 1 ; j <= n ; j++)
      (a)
```

$$P_{ij}^k = \min \left\{ P_{ij}^{(k-1)}, \min \left\{ P_{ik}^{(k-1)}, P_{kj}^{(k-1)} \right\} \right\} \quad (1)$$

$$P_{ij}^k = \min \left\{ P_{ij}^{(k-1)}, \max \left\{ P_{ik}^{(k-1)}, P_{kj}^{(k-1)} \right\} \right\} \quad (2)$$

$$P_{ij}^k = \min \left\{ P_{ij}^{(k-1)}, P_{ik}^{(k-1)} + P_{kj}^{(k-1)} \right\} \quad (3)$$

$$P_{ij}^k = \min \left\{ P_{ij}^{(k-1)}, P_{ik}^{(k-1)} \times P_{kj}^{(k-1)} \right\} \quad (4)$$

۷۴- n فایل داریم که طول فایل i ام L_i و احتمال دسترسی به آن P_i است به ما داده شده است. می‌خواهیم این فایل‌ها را طوری پشت سرهم قرار دهیم که میانگین زمان دسترسی به فایل‌ها کمینه شود. به عبارت دیگر می‌خواهیم این

فایل‌ها را به ترتیب از ۱ تا n شماره‌گذاری کنیم به طوری که $\sum_{i=1}^n \left(P_i \sum_{j=1}^i L_j \right)$ کمینه شود. کدام یک از راه‌های زیر

بهترین ترتیب برای این کار است؟

$$(1) \text{ مرتب‌سازی براساس } \frac{L_i}{P_i} \text{ به صورت صعودی}$$

$$(2) \text{ مرتب‌سازی براساس } \frac{P_i}{L_i} \text{ به صورت صعودی}$$

$$(3) \text{ مرتب‌سازی براساس } L_i \text{ و در صورت تساوی براساس } P_i$$

$$(4) \text{ ساخت درخت هافمن براساس } \frac{L_i}{P_i} \text{ و پیمایش آن به صورت عمق اول}$$

۷۵- چند تا از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- اگر $g(n) = o(f(n))$ (نماد o کوچک) آنگاه $f(n) = \omega(g(n))$

- اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ آنگاه $f(n) = o(g(n))$

- برای هر ثابت $c > 0$ و هر ثابت $a > 1$ و هر تابع صعودی $f(n)$ داریم: $(f(n))^c = o(a^{f(n)})$

۲ (۱)

۳ (۲)

۱ (۳)

۴ صفر

۷۶- فرض کنید آرایه‌ای از n عنصر داده شده است و می‌خواهید میانه (Median) آن را با استفاده از روش تقسیم و حل (Divide and Conquer) پیدا کنید. کدام یک از گزینه‌های زیر درباره این رویکرد صحیح است و با کمترین هزینه، پاسخ درست را محاسبه خواهد کرد؟

(۱) در هر مرحله، آرایه به دو بخش با اندازه برابر تقسیم می‌شود و میانه هر بخش جداگانه محاسبه می‌شود. سپس، میانه نهایی با استفاده از این دو مقدار و در زمان $O(1)$ تعیین می‌شود.

(۲) این روش فقط زمانی کار می‌کند که آرایه به صورت مرتب باشد، زیرا برای پیدا کردن میانه نیاز به مرتب‌سازی اولیه داریم که در صورت استفاده از Radix Sort در بدترین حالت $O(n)$ خواهد شد.

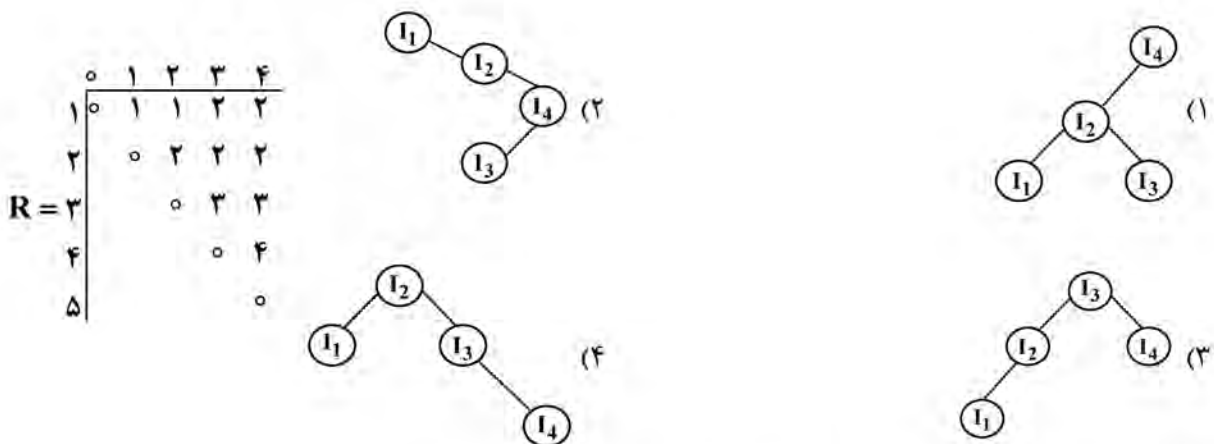
(۳) از الگوریتم انتخاب k -امین کوچک‌ترین عنصر استفاده می‌شود که با پیچیدگی زمانی $O(n)$ در بدترین حالت می‌تواند میانه را بدون نیاز به مرتب‌سازی کامل آرایه پیدا کند.

(۴) از الگوریتم انتخاب k -امین کوچک‌ترین عنصر و Quick Sort استفاده می‌شود که با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ در بدترین حالت می‌تواند میانه را بدون نیاز به مرتب‌سازی کامل آرایه پیدا کند.

۷۷- فرض کنید نتیجه یک ماتریس ریشه R از درخت جستجوی دودویی بهینه به صورت جدول زیر حاصل شده است و

$I_1 < I_2 < I_3 < I_4$ کلیدها و $p_1 = p_2 = \frac{3}{8}$ و $p_3 = p_4 = \frac{1}{8}$ احتمال جستجوی این درخت دودویی هستند.

کدام گزینه شکل نهایی درخت مزبور است؟ (R مشخص کننده فرزندان دور شده است).



۷۸- برای کدام یک از مسائل زیر، الگوریتم با زمان چند جمله‌ای پیدا شده است؟

الف - کوله‌پشتی کسری

ب - تعیین نزدیک‌ترین زوج نقطه بین چند نقطه داده شده در صفحه

(۲) هیچ کدام از «الف» و «ب»

(۱) هر دوی «الف» و «ب»

(۴) فقط «ب»

(۳) فقط «الف»

- ۷۹- فرض کنید یک جدول $n \times n$ دارید و می‌خواهید در هر خانه از این جدول یک عدد بین ۱ تا k قرار دهید، به طوری که:
- هر عدد در هر سطر و هر ستون منحصر به فرد باشد (مانند جداول سودوکو).
 - برخی خانه‌ها از قبل پر شده‌اند و نمی‌توان مقدار آنها را تغییر داد.
- برای حل این مسئله از الگوریتم عقب‌گرد (Backtracking) استفاده می‌کنید. کدام روش برای بهینه‌سازی و جلوگیری از بررسی مسیرهای نامعتبر مناسب‌تر است؟
- ۱) ابتدا خانه‌هایی را که در گوشه‌های جدول قرار دارند پر کنید، زیرا محدودیت‌های کمتری دارند.
 - ۲) در هر مرحله، اولین خانه خالی را انتخاب کنید و به ترتیب مقادیر ۱ تا k را امتحان کنید.
 - ۳) در هر مرحله، مقادیر ممکن را برای تمام خانه‌ها محاسبه کنید و سپس از مقداردهی تصادفی برای خانه‌ها استفاده کنید.
 - ۴) در هر مرحله، خانه‌ای را انتخاب کنید که تعداد مقادیر ممکن کمتری دارد و ابتدا مقادیری را امتحان کنید که در سطر و ستون همسایگان کمتر تکرار شده‌اند.

- ۸۰- در مسئله زنجیره ضرب ماتریس‌ها (Matrix Chain Multiplication)، از روش شاخه و حد (Branch and Bound) برای پیدا کردن ترتیب بهینه ضرب ماتریس‌ها استفاده می‌شود. کدام یک از گزینه‌های زیر به درستی مفهوم شاخه‌ها (Branches) و حدها (Bounds) را در این روش توضیح می‌دهد؟
- ۱) شاخه‌ها نشان‌دهنده تمامی نقاط تقسیم ممکن بین ماتریس‌ها هستند که مسئله را به دو زیرمسئله تقسیم می‌کنند و حد پایین (Lower Bound) مجموع تعداد عملیات ضرب مورد نیاز برای حل زیرمسئله‌ها و عملیات نهایی ادغام آنها است.
 - ۲) شاخه‌ها تعداد عملیات ضرب برای هر ترتیب خاص از ضرب ماتریس‌ها را نشان می‌دهند و حد پایین (Lower Bound) تنها برای شناسایی شاخه‌هایی استفاده می‌شود که منجر به بیشترین تعداد عملیات ضرب عددی می‌شوند.
 - ۳) شاخه‌ها نشان‌دهنده تمام ترکیب‌های ممکن برای گروه‌بندی ضرب ماتریس‌ها هستند که مسئله را به دو زیرمسئله تقسیم می‌کنند و حد پایین (Lower Bound) نشان‌دهنده تعداد حداقل عملیات ضرب عددی ممکن در کل مسئله است.
 - ۴) حل مسئله زنجیره ضرب ماتریس‌ها با رویکرد شاخه و حد مقدور نیست.

- ۸۱- فرض کنید L زبان عبارت منظم $(0+1)^*(0+1)(0+1)$ باشد. از دو عبارت $\alpha = 110101101011000100$ و $\beta = 010111011101011$ کدام عضو زبان L است؟

۱) هر دو

۲) فقط α

۳) فقط β

۴) هیچ کدام

- ۸۲- فرض کنید L زبان گرامر زیر باشد:

$$S \rightarrow TbT$$

$$T \rightarrow aTb \mid bTa \mid TT \mid \lambda$$

از دو عبارت $\alpha = baaabbabbb$ و $\beta = bbbabbaabbb$ کدام عضو زبان L است؟

۱) فقط α

۲) فقط β

۳) هر دو

۴) هیچ کدام

۸۳- فرض کنید L زبان گرامر زیر باشد:

$$S \rightarrow BA$$

$$A \rightarrow \circ \circ A \mid \circ$$

$$B \rightarrow \circ B \mid \circ$$

از دو عبارت $\alpha = \circ^{21} 1^{\circ}$ و $\beta = \circ^{22} 1^{\circ}$ کدام عضو زبان L هست؟

(۱) فقط α

(۲) فقط β

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۸۴- فرض کنید:

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_{ab}(w) = n_{aa}(w)\}$$

از این دو زبان کدام منظم است؟

(۲) فقط L_2

(۱) فقط L_1

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

۸۵- از دو عبارت زیر کدام صحیح است؟

I: اگر تعدادی متناهی رشته از یک زبان منظم حذف کنیم حاصل یک زبان منظم خواهد بود.

II: اگر تعدادی متناهی رشته به یک زبان غیرمنظم اضافه کنیم حاصل یک زبان غیرمنظم خواهد بود.

(۱) فقط I

(۲) فقط II

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۸۶- فرض کنید L زبان گرامر زیر با متغیر شروع S باشد:

$$S \rightarrow aAS$$

$$S \rightarrow a$$

$$A \rightarrow SbA$$

$$A \rightarrow SS$$

$$A \rightarrow ba$$

از دو عبارت زیر کدام صحیح است؟

I: برای هر $w \in L$ ، پنج رشته u, v, x, y, z وجود دارند که $w = uvxyz$ و $|vy| \geq 1$ و برای هر n ,

$$uv^nxy^n z \in L$$

II: اگر زبان های L_1 و L_2 به گونه ای باشند به طوری که $L = L_1 \cup L_2$ آنگاه L_1 و L_2 هر دو باید مستقل از متن

باشند.

(۱) فقط I

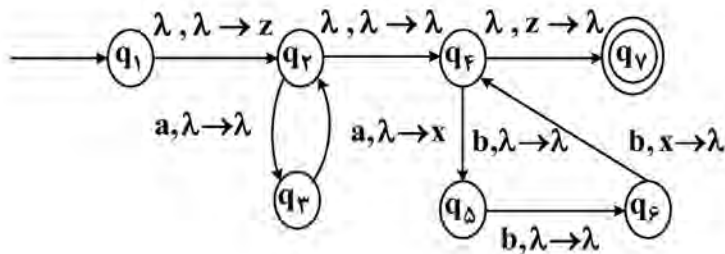
(۲) فقط II

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

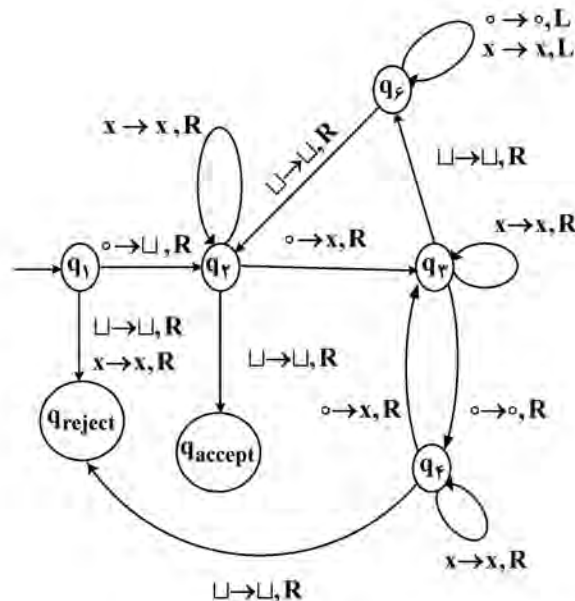
۸۷- فرض کنید L زبان PDA با شکل زیر باشد که $\Sigma = \{a, b\}$ الفبای ورودی و $\Gamma = \{x, z\}$ الفبای پشته و Z نماد بالایی پشته است.

با قرار گرفتن کدام یک از دو مقدار a یا b به جای y در $w = a^{۱۴۰۴} y b^{۲۱۰۵}$ ، رشته w حاصل در L قرار می‌گیرد؟



- (۱) فقط a
- (۲) فقط b
- (۳) هر دو
- (۴) هیچ کدام

۸۸- فرض کنید L زبان ماشین تورینگ زیر باشد:



از دو مورد زیر کدام درست است؟

I: $\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ \in L$

II: $\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ \in L$

(۲) فقط II

(۴) هیچ کدام

(۱) فقط I

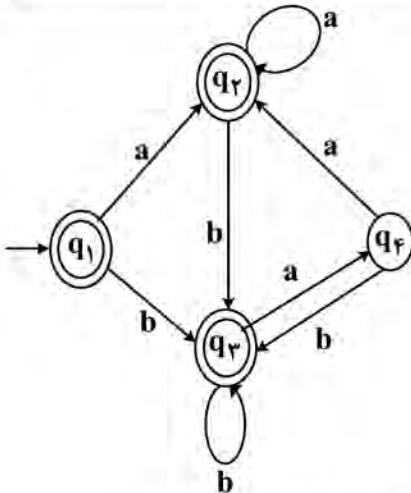
(۳) هر دو

۸۹- فرض کنید M یک ماشین تورینگ معمولی است با این تفاوت که امکان حرکت به چپ را ندارد اما می‌تواند در همان

خانه بماند. کدام مورد در خصوص M درست است؟

- (۱) M معادل ماشین تورینگ معمولی است.
- (۲) M قدرت تشخیص زبان‌های منظم را ندارد.
- (۳) M قدرت تشخیص زبان‌های منظم را دارد ولی قدرت تشخیص زبان‌های مستقل از متن را ندارد.
- (۴) M قدرت تشخیص زبان‌های مستقل از متن را دارد ولی قدرت آن از ماشین‌های تورینگ معمولی کمتر است.

۹۰- فرض کنید L زبان dfa زیر باشد:



فرض کنیم $w \in L$ رشته‌ای از زبان L با طول حداقل 1403 باشد. کدام مورد، همواره درست است؟

- الف - اگر w با a شروع شود رشته wa^{1403} حتماً در L خواهد بود.
 ب - اگر w با b شروع شود رشته wb^{1403} حتماً در L خواهد بود.
 (۱) فقط «الف»
 (۲) فقط «ب»
 (۳) هر دو
 (۴) هیچ کدام

میانی منطقی و نظریه مجموعه‌ها:

۹۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر، با گزاره $\neg \forall x \exists y P(x, y)$ معادل منطقی هستند؟

- (a) $\exists x \neg \forall y P(x, y)$
 (b) $\exists x \exists y \neg P(x, y)$
 (c) $\exists x \neg \exists y P(x, y)$
 (d) $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

- (۱) یک
 (۲) دو
 (۳) سه
 (۴) چهار

۹۲- از دو استدلال زیر کدام معتبر است؟

- الف - چنین نیست که (همه دانش آموزان باهوش و همه معلم‌ها توانمند باشند).
 اگر منابع مالی به اندازه کافی وجود داشته باشد، آن‌گاه همه معلم‌ها توانمند هستند.
 بنابراین: اگر همه دانش آموزان باهوش هستند، آن‌گاه منابع مالی به اندازه کافی وجود ندارد.
 ب - تمام دانش آموزان باهوش هستند.
 بعضی معلم‌ها باهوش هستند.
 بنابراین: بعضی دانش آموزان معلم هستند.

- (۱) فقط «الف»
 (۲) فقط «ب»
 (۳) هر دو
 (۴) هیچ کدام

۹۳- از دو عبارت $\alpha \equiv \neg P \rightarrow (r \vee q)$ و $\beta \equiv \neg r \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ کدام یک مستلزم منطقی دیگری است؟ (X را مستلزم منطقی Y گوئیم هرگاه $Y \Rightarrow X$)

- (۱) فقط α مستلزم β است.
 (۲) فقط β مستلزم α است.
 (۳) هر یک مستلزم دیگری است.
 (۴) هیچ کدام مستلزم دیگری نیست.

۹۴- کدام مورد بهترین ترجمه برای عبارت زیر در منطق گزاره‌ها است؟

اگر آفتاب طلوع کند «به دوچرخه سواری می‌روم فقط اگر دوچرخه خراب باشد.»

T: آفتاب طلوع می‌کند

D: به دوچرخه سواری می‌روم

K: دوچرخه خراب است

$$(1) (T \wedge \neg K) \rightarrow D$$

$$(2) T \rightarrow (\neg K \rightarrow D)$$

$$(3) T \rightarrow (K \rightarrow \neg D)$$

$$(4) T \rightarrow (D \leftrightarrow K)$$

۹۵- فرض کنید:

$A(x)$: x یک کاربر است

$C(x)$: x به سرور وصل شده است

$R(x, y)$: x, y را دریافت می‌کند

$k(x)$: x پیام کدگذاری شده است

کدام مورد بهترین ترجمه برای عبارت زیر در منطق سورها است؟

«کاربرانی که به سرور متصل شده باشند، همه پیام‌های کدگذاری شده را دریافت می‌کنند.»

$$(1) \forall x[A(x) \wedge C(x) \rightarrow \forall y(k(y) \rightarrow R(x, y))]$$

$$(2) \forall x[\neg(A(x) \wedge C(x)) \rightarrow \neg \forall y(k(y) \rightarrow R(x, y))]$$

$$(3) \forall x[A(x) \rightarrow \forall y(k(y) \wedge R(x, y) \rightarrow C(x))]$$

$$(4) \forall x[A(x) \wedge \exists y(k(y) \wedge \neg R(x, y)) \rightarrow \neg C(x)]$$

۹۶- فرض کنید L زمان مرتبه اول $L = \{R, C\}$ باشد که در آن R نماد معمولی دومی و C ثابت است.

دو ساخت $M = (\mathbb{Z}, <_m, -1)$ و $N = (\mathbb{N}, <, 0)$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که N مجموعه اعداد صحیح نامنفی، Z مجموعه اعداد صحیح، < کوچک تری معمولی اعداد صحیح نامنفی و $<_m$ به صورت زیر است:

$$x <_m y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \geq 0, & x < y \\ x, y < 0, & -x < -y \\ x \geq 0, & y < 0 \end{cases}$$

اگر $\alpha: N \rightarrow M$ یک نشانندن (embedding) از N به M باشد از دو گزاره زیر، کدام یک همواره درست است؟

$$(الف) \alpha(1) = -2$$

(ب) α پوشا است.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب» (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۹۷- با در نظر گرفتن فرضیات سؤال ۹۶، اگر $\alpha \equiv \forall x (R(x, C) \rightarrow \exists y R(y, x))$ کدام مورد درست است؟

$$(1) N \models \alpha, M \models \alpha$$

$$(2) N \models \alpha, M \not\models \alpha$$

$$(3) N \models \alpha, M \models \alpha$$

$$(4) N \not\models \alpha, M \not\models \alpha$$

۹۸- فرض کنید α یک فرمول در منطق گزاره‌ها شامل سه گزاره اتمی p, q, r باشد، که در جدول ارزش آن تنها سه سطر با ارزش ۰ مطابق جدول زیر وجود دارد:

p	q	r	α
۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰

در فرم نرمال عطفی (CNF) α ، کدام عبارت (Clause) دیده نمی‌شود؟

(۱) $\neg p \vee q \vee \neg r$

(۲) $\neg p \vee q \vee r$

(۳) $p \vee q \vee \neg r$

(۴) $\neg p \vee \neg q \vee r$

۹۹- فرض کنید رابط گزاره‌ای * با جدول ارزش زیر داده شده است.

A	B	A * B
۱	۱	۰
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۰	۱

یک مجموعه از رابط‌های گزاره‌ای را کامل گوییم، هرگاه هر فرمول در منطق گزاره‌ها دارای معادلی باشد که فقط از رابط‌های آن مجموعه استفاده کرده باشد.

در بین $A_0 = \{*\}$ ، $A_1 = \{\neg, \rightarrow\}$ ، $A_2 = \{\wedge, \vee\}$ ، چندمجموعه کامل از رابط‌های گزاره‌ای، وجود دارد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) صفر

۱۰۰- فرض کنید زبان مرتبه اول شامل یک نماد معمولی دو موضعی P باشد. سه جمله a, b و c زیر را در نظر بگیرید:

(a) $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x, z)))$

(b) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow (P(y, x) \rightarrow x = y))$

(c) $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$

اگر ساخت N به صورت $N = (\{0, 1\}, \{0, 1\} \times \{0, 1\})$ تعریف شود، آنگاه چه تعداد از سه عبارت فوق، در N صادق هستند؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) صفر

۱۰۱- کدام مورد، در خصوص مجموعه تمام زیر دنباله‌های دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ درست است؟

(۱) ناشمارا است.

(۲) متناهی ولی ناتهی است.

(۳) نامتناهی ولی شمارا است.

(۴) برابر تهی است.

۱۰۲- مجموعه $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ با چه تعدادی از مجموعه‌های \mathbb{C} ، $[0, \sqrt{2}]$ و \mathbb{N} هم‌توان است؟ (\mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی، \mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا و \mathbb{C} مجموعه اعداد مختلط است.)

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) صفر

۱۰۳- فرض کنید $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ مجموعه همه توابع از \mathbb{N} به \mathbb{N} باشد. رابطه $R = \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(0) = g(0)\}$ را

بر A در نظر بگیرید. اگر A/R مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی رابطه R بر A باشد، کدام مورد برای مجموعه A/R ، درست است؟

(۱) متناهی است.

(۲) ناشمارا است.

(۳) نامتناهی ولی شمارا است.

(۴) اصلاً رابطه R هم‌ارزی نیست.

۱۰۴- فرض کنید \mathbb{N}_e مجموعه اعداد طبیعی زوج و $G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_e^{\mathbb{N}}$ با ضابطه $G(n) = f_n$ چنان تعریف شود، که

$f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_e$ و $f_n(m) = 2n$. کدام مورد درست است؟ ($\mathbb{N}_e^{\mathbb{N}}$ یعنی مجموعه همه توابع از \mathbb{N} به \mathbb{N}_e)

(۱) G پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست. (۲) G یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.

(۳) G هم یک‌به‌یک و هم پوشا است. (۴) G نه یک‌به‌یک و نه پوشا است.

۱۰۵- فرض کنید $A = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X = \mathbb{N}\}$ (= نماد هم‌توانی است). مجموعه A با کدام یک از مجموعه‌های زیر، هم‌توان است؟

(۱) \mathbb{Q} (۲) ${}^2\mathbb{R}$

(۳) \mathbb{R} (۴) $\{1, \dots, n\}$ که $n \in \mathbb{N}$.

۱۰۶- فرض کنید $A = \mathbb{N} - \{1\}$. رابطه R را بر A به صورت: $m \mid n \Leftrightarrow m \in R n$ (عدد m عدد n را عاد می‌کند). تعریف

می‌کنیم. کدام مورد برای ترتیب جزئی (A, R) درست است؟

الف - هر زنجیر، کران بالا دارد.

ب - (A, R) دارای عضو ماکسیمال هستند.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب» (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۰۷- از دو عبارت زیر، کدام معادل اصل انتخاب، است؟

الف - هر تابع پوشا دارای وارون راست است.

ب - اگر $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ ، ناتهی است.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب» (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۰۸- تمام اعضای مجموعه $(P(P(P(P(\emptyset)))))$ را فهرست می‌کنیم (P نشان‌دهنده مجموعه توانی است). اگر x تعداد

اوردینال‌ها و y تعداد مجموعه‌های متعددی که اوردینال نیست در این فهرست باشند، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱) $0 \leq xy \leq 4$ (۲) $xy \geq 13$

(۳) $9 \leq xy \leq 12$ (۴) $5 \leq xy \leq 8$

۱۰۹- فرض کنید C مجموعه‌ای ناتهی از اوردینال‌ها باشد. از دو گزاره زیر، کدام مورد درست است؟

الف - $\bigcap C$ ، کوچک‌ترین اوردینال در مجموعه C است.

ب - $\bigcup C$ ، کوچک‌ترین عضو در کلاس $\{\alpha \in \text{Ord} : \forall \beta \in C (\alpha > \beta)\}$ است.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۱۰- از دو اوردینال زیر، کدام اوردینال با $\omega + \omega + \omega$ ، برابر است؟

الف - $\omega \cdot 3$ ب - $3 \cdot \omega$

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات:

۱۱۱- به چند طریق می‌توان از ۶۴ خانه یک جدول 8×8 سه خانه انتخاب کرد، به طوری که یکی از این سه خانه با هر دو

خانه انتخاب شده دیگر ضلع مجاور داشته باشد؟

(۱) ۱۹۶ (۲) ۲۹۲

(۳) ۳۵۲ (۴) ۳۸۴

۱۱۲- فرض کنید t تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۵ شیء متمایز در ۳ ظرف متمایز، باشد به طوری که هیچ ظرفی خالی نمانده و ترتیب اشیاء در ظرف‌ها مهم باشد. هم‌چنین s تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۵ شیء متمایز در ۳ ظرف متمایز باشد، به طوری که هیچ ظرفی خالی نمانده و ترتیب اشیاء در ظرف‌ها مهم نباشد. کدام مورد درست است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{t}{s} \in [0, 1] & (2) \frac{t}{s} \in (1, 3] \\ (3) \frac{t}{s} \in (3, 5] & (4) \frac{t}{s} \in (5, \infty) \end{array}$$

۱۱۳- فرض کنید t تعداد جایگشت‌های حروف کلمه AAABBCCDD باشد، که در آن کلمه AB ظاهر نشده است، مقدار $\frac{t}{240}$ در کدام بازه، قرار دارد؟

$$\begin{array}{ll} (1) [0, 10] & (2) [10, 30] \\ (3) [30, 50] & (4) (50, \infty) \end{array}$$

۱۱۴- فرض کنید t تعداد رشته‌های به طول ۸ با نمادهای (حروف) ۰, ۱ باشد، به طوری که حداقل در یکی از دو شرط زیر صدق کند:
الف - با ۰۰۰ شروع می‌شود.
ب - با ۱۱۱ تمام می‌شود.

اگر $t = x \times y$ ، به طوری که x و y اعداد طبیعی باشند و x فرد باشد آنگاه مقدار $x \times y$ در کدام بازه، قرار دارد؟

$$\begin{array}{ll} (1) [10, 30] & (2) [0, 10] \\ (3) [30, 50] & (4) (50, \infty) \end{array}$$

۱۱۵- فرض کنید $|A|$ تعداد عضوهای مجموعه $A = \{X \subseteq \{1, 2, \dots, 20\} : |X| \geq 2, X \cap \{1, 2, 3\} \neq \emptyset\}$ باشد. مقدار $\frac{|A| + 3}{4^{17}}$ در کدام بازه، قرار دارد؟

$$\begin{array}{ll} (1) [0, 5] & (2) (5, 10] \\ (3) [10, 20] & (4) (20, \infty) \end{array}$$

۱۱۶- از دو گزاره زیر، کدام گزاره درست است؟

الف - اگر G گرافی با $n \geq 3$ رأس و $2 + \binom{n-1}{2}$ یال باشد، آنگاه G همیلتونی است.

ب - هر گراف ۳-منتظم شش رأسی، همیلتونی است.

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ فقط «الف»} & (2) \text{ فقط «ب»} \\ (3) \text{ هر دو} & (4) \text{ هیچ کدام} \end{array}$$

۱۱۷- از دو گزاره زیر، کدام گزاره درست است؟

الف - گراف مسطح با ۷ رأس و ۱۳ یال، وجود دارد.

ب - گراف مسطح با ۸ رأس و ۲۰ یال، وجود دارد.

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ فقط «الف»} & (2) \text{ فقط «ب»} \\ (3) \text{ هر دو} & (4) \text{ هیچ کدام} \end{array}$$

۱۱۸- از دو گزاره زیر، کدام گزاره درست است؟

الف - گراف G با ۸ رأس و ۱۷ یال و عدد رنگی $\chi(G) = 2$ وجود دارد.

ب - اگر گراف G حداکثر دو دور فرد داشته باشد، آنگاه رأس‌های آن را می‌توان با حداکثر ۳ رنگ، رنگ کرد به گونه‌ای که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند.

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) هیچ‌کدام

۱۱۹- فرض کنید $C(x) = 1 + 2x^3 + 8x^4 + 22x^5 + 52x^6 + \dots$ تابع مولد دنباله $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ باشد. اگر این دنباله در

رابطه بازگشتی $c_n = ac_{n-1} + bc_{n-2} + cc_{n-3}$, $n \geq 3$ صدق کند، کدام مورد درست است؟

(۱) $b \in [-\infty, -2]$

(۲) $b \in (-2, 10]$

(۳) $b \in (10, 30]$

(۴) $b \in (30, \infty)$

۱۲۰- فرض کنید $\frac{1}{(1+3x)^{10}} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ اگر $t = \frac{a_4}{715}$ کدام مورد درست است؟

(۱) $t \in [-\infty, -2]$

(۲) $t \in (-2, 27]$

(۳) $t \in (27, 54]$

(۴) $t \in (54, \infty)$

۱۲۱- مجموع اعداد طبیعی ۳ رقمی مضرب ۷ را n و مجموع اعداد طبیعی ۳ رقمی مضرب ۳ را k می‌نامیم. کدام مورد درست است؟ (اعداد ۳ رقمی از ۱۰۰ شروع می‌شوند.)

(۱) n فرد و k زوج است.

(۲) n زوج و k فرد است.

(۳) n و k هر دو فرد هستند.

(۴) n و k هر دو زوج هستند.

۱۲۲- تعداد تابع‌های یک‌به‌یک مانند f ، از $\{1, 2, \dots, 9\}$ به $\{1, 2, \dots, 15\}$ ، با شرط $f(1) < f(3) < f(2)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{15!}{3! \times 6!}$

(۲) $\frac{3! \times 15!}{6!}$

(۳) $\frac{15!}{3! \times 6! \times 9!}$

(۴) $\frac{3! \times 15!}{6! \times 9!}$

۱۲۳- می‌خواهیم 7^3 توپ غیرمشابه را در 7^2 سبد مشابه چنان بخش کنیم، که در هر سبد ۷ توپ قرار گیرد. تعداد حالات

ممکن برای این کار را n می‌نامیم. بزرگ‌ترین عدد طبیعی k که n بر 7^k بخش پذیر باشد، کدام است؟

(۱) ۱۷

(۲) ۱۶

(۳) ۸

(۴) صفر

۱۲۴- یک خانه از گوشه یک جدول 6×7 را حذف کرده‌ایم. به چند طریق می‌توان ۲ خانه از ۴۱ خانه باقی‌مانده را انتخاب کرد، به طوری که نه در یک سطر باشند نه در یک ستون؟

(۱) ۲۸۵

(۲) ۶۰۰

(۳) ۸۲۰

(۴) ۱۰۲۰

۱۲۵- ۲۰ مهره سفید غیرمشابه و ۱۰ مهره سیاه غیرمشابه موجود است. به چند طریق می‌توان این ۳۰ مهره را دور یک دایره چید به طوری که هر مهره سفید با یک مهره سفید و یک مهره سیاه، مجاور باشد؟

(۱) $9! \times 20!$

(۲) $10! \times 19!$

(۳) $\frac{10! \times 20!}{30}$

۱۲۶- کدام درست است؟

الف - هر گراف ۱۴ رأسی، فاقد (بدون) یال برشی، حداقل ۱۴ یال دارد.

ب - هر گراف ۱۴ رأسی با ۴۲ یال، فاقد (بدون) یال برشی است.

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

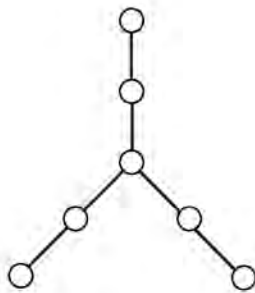
۱۲۷- یک گراف کامل ۹ رأسی، دارای چند زیرگراف یکرخت (همسان) با گراف زیر است؟

(۱) $\frac{9!}{2}$

(۲) $\frac{9!}{6}$

(۳) $\frac{9!}{12}$

(۴) $\frac{9!}{72}$



۱۲۸- یک گراف مسیر با ۱۵ رأس (و ۱۴ یال) مفروض است. به چند طریق می‌توان ۵ رأس از آن را انتخاب کرد، به طوری که دوبه‌دو غیرمجاور باشند؟

(۱) $\binom{20}{6}$

(۲) $\binom{15}{6}$

(۳) $\binom{14}{6}$

(۴) $\binom{11}{6}$

۱۲۹- کدام مورد برای رابطه بازگشتی زیر، همواره درست است؟

$$a_n = -2(a_{n-1} + a_{n-2})$$

(۱) $a_n = c_1(-2)^n + c_2 2^n$ وجود دارند به طوری که

(۲) $a_n = (c_1 + c_2 n) 2^n$ وجود دارند به طوری که

(۳) $a_n = (c_1 + c_2 n)(-2)^n$ وجود دارند به طوری که

(۴) به مقدار دو جمله نخست دنباله بستگی دارد.

۱۳۰- به چند طریق می‌توان ۱۱ پله را با قدم‌های یک و دو پله‌ای طی کرد، به طوری که اگر اولین قدم یک پله‌ای باشد، آنگاه آخرین قدم، دو پله‌ای باشد؟

(۱) ۱۱۰

(۲) ۸۹

(۳) ۵۵

(۴) ۳۴