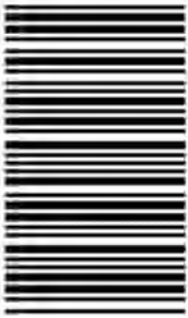


کد کنترل

259

A



259A

عصر جمعه
۱۴۰۲/۱۲/۰۴



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«در زمینه مسائل علمی، باید دنبال قله بود.»
مقام معظم رهبری

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۴۰۳

علوم کامپیوتر (کد ۱۲۰۹ - (سناور))

مدت زمان پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۳۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|--|------------|----------|----------|
| ۱ | زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی) | ۲۵ | ۱ | ۲۵ |
| ۲ | دروس پایه (ریاضی عمومی (۲ و ۱)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال) | ۳۵ | ۲۶ | ۶۰ |
| ۳ | ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه | ۳۰ | ۶۱ | ۹۰ |
| ۴ | مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها | ۲۰ | ۹۱ | ۱۱۰ |
| ۵ | ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات | ۲۰ | ۱۱۱ | ۱۳۰ |

این آزمون، نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق جاب، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره
صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤال‌ها، نوع و
کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤال‌ها و پایین پاسخنامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- If you want to excel at what you love and take your skills to the next level, you need to make a to both yourself and your craft.
1) commitment 2) passion 3) statement 4) venture
- 2- It is usually difficult to clearly between fact and fiction in her books.
1) gloat 2) rely 3) raise 4) distinguish
- 3- Some people seem to lack a moral, but those who have one are capable of making the right choice when confronted with difficult decisions.
1) aspect 2) compass 3) dilemma 4) sensation
- 4- The factual error may be insignificant; but it is surprising in a book put out by a/an academic publisher.
1) complacent 2) incipient 3) prestigious 4) notorious
- 5- In a society conditioned for instant, most people want quick results.
1) marrow 2) gratification 3) spontaneity 4) consternation
- 6- One medically-qualified official was that a product could be so beneficial and yet not have its medical benefit matched by commensurate commercial opportunity.
1) incredulous 2) quintessential 3) appeased 4) exhilarated
- 7- Some aspects of zoological gardens always me, because animals are put there expressly for the entertainment of the public.
1) deliberate 2) surmise 3) patronize 4) appall

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Online learning has been around for years, but it really took off during the COVID-19 pandemic. Many schools and universities (8) transition to online learning, and this trend is likely to continue in the future. There are many benefits to online learning, (9) accessibility and flexibility. Students can learn at their own pace, and from anywhere in the world.

- 14- According to the passage, which of the following statements is true about Alan Turing?
- 1) He was initially known as the person who built the first computer.
 - 2) He was the leading figure in designing computer tools like YACC.
 - 3) The foundations of context-free grammars were transformed by his theoretical ideas.
 - 4) A key concept in computer science can be traced back to him, who is in a way credited with being its originator.
- 15- According to the passage, which of the following statements is true?
- 1) Theoretical concepts are usually immediately integrated into mainstream computing.
 - 2) Chomsky was among the people who originally proposed the first RSA public-key cryptosystem.
 - 3) Mathematical logic and automata theory have proven useful in verifying intricate computer systems.
 - 4) The large class of NP-complete problems was identified by accident when theoreticians were exploring the complexity of computational problems in the early 20th century.

PASSAGE 2:

People have been using mechanical devices to aid calculation for thousands of years. For example, the abacus probably existed in Babylonia (present-day Iraq) about 3000 B.C.E. The ancient Greeks developed some very sophisticated analog computers. In 1901, an ancient Greek shipwreck was discovered off the island of Antikythera. Inside was a salt-encrusted device (now called the Antikythera machine) that consisted of rusted metal gears and pointers. When this c. 80 B.C.E. device was reconstructed, it produced a mechanism for predicting the motions of the stars and planets.

John Napier (1550-1617), the Scottish inventor of logarithms, invented Napier's rods (sometimes called "Napier's bones") c. 1610 to simplify the task of multiplication. In 1641, the French mathematician and philosopher Blaise Pascal (1623-1662) built a mechanical adding machine. Similar work was done by Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Leibniz also advocated use of the binary system for doing calculations.

Recently it was discovered that Wilhelm Schickard (1592-1635), a graduate of the University of Tübingen (Germany), constructed such a device in 1623-4, before both Pascal and Leibniz. A brief description of the device is contained in two letters to Johannes Kepler. Unfortunately, at least one copy of the machine burned up in a fire, and Schickard himself died of bubonic plague in 1635, during the Thirty Years' War.

- 16- The word "predicting" in paragraph 1 is closest in meaning to
- 1) sorting
 - 2) anticipating
 - 3) modifying
 - 4) formulating
- 17- The word "it" in paragraph 1 refers to
- 1) metal
 - 2) island
 - 3) device
 - 4) mechanism
- 18- All of the following statements are true about Blaise Pascal EXCEPT that
- 1) he was a French philosopher
 - 2) he was a 17th-century mathematician
 - 3) he constructed a mechanical adding device
 - 4) he proposed the binary system for doing calculations

- 19- According to the passage, which of the following statements is true?
- 1) John Napier proposed a plan for a mechanical adding machine.
 - 2) Wilhelm Schickard invented a device to show the movement of the stars.
 - 3) The inventor of logarithms also invented a device to facilitate the task of multiplication.
 - 4) Gottfried Wilhelm Leibniz died of bubonic plague in the 17th century, during the Thirty Years' War.
- 20- Which of the following best describes the tone of the passage?
- 1) Ironic
 - 2) Passionate
 - 3) Objective
 - 4) Ambivalent

PASSAGE 3:

The period from 1950 to 1970 witnessed significant hardware developments that revolutionized computer design and architecture. Vacuum tubes, which were initially used to represent bits in circuits, were replaced by transistors. [1] Transistors offered greater efficiency and the ability to accommodate thousands of them in a single circuit, resulting in a tremendous increase in computational power.

During this time, high-level programming languages like BASIC were introduced. [2] IBM played a pivotal role by introducing standardized computers that could be programmed for various use cases and industries. Integrated circuits emerged, allowing for even smaller chips with more powerful computational capabilities. [3] Concepts such as time-sharing algorithms and multiple-user access were developed, enabling multiple users to share computing resources effectively.

Two major programming languages that emerged during the 1960s to 1970s were C and Pascal. C became a foundational language for many modern programming languages, including JavaScript and Python. [4] Researchers and programmers started solving various problems using the power and flexibility of the C language.

Overall, the period from 1950 to 1970 witnessed groundbreaking advancements in hardware, programming languages, and computer architecture, laying the foundation for the digital era that would follow. These developments set the stage for the rapid progress and innovation that would shape the field of computer science in the years to come.

- 21- The word "pivotal" in paragraph 2 is closest in meaning to
- 1) key
 - 2) theoretical
 - 3) peripheral
 - 4) hypothetical
- 22- All of the following programming languages are mentioned in the passage EXCEPT
- 1) JavaScript
 - 2) Kotlin
 - 3) Pascal
 - 4) BASIC
- 23- According to the passage, which of the following statements is true?
- 1) The programming language C was in a way influential in the emergence of BASIC, which was the easiest programming language to learn.
 - 2) The programming language C appeared in the early 20th century and was among the popular languages during the 1960s to the 1970s.
 - 3) Vacuum tubes, used to represent bits in circuits, should in fact be considered the modern counterparts of transistors.
 - 4) Revolutionary developments in hardware, programming languages, and computer architecture that took place from 1950 to 1970 paved the way for further progress in the field of computer science in the following years.

24- In which position marked by [1], [2], [3] or [4], can the following sentence best be inserted in the passage?

Its versatility and efficiency greatly expanded the capabilities of programming languages, enabling developers to write instructions and perform tasks more effectively.

- 1) [1] 2) [2] 3) [3] 4) [4]

25- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?

I. Which company first invented computer transistors?

II. Did IBM in any way contribute to the development or spread of programming languages?

III. What is the most frequently-used computer language?

- 1) Only I 2) Only II 3) Only III 4) II and III

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۲۶- تعداد ریشه‌های معادله $z^2 + 4\bar{z} + 2z + i \operatorname{Im}(z) = 1$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۷- مقدار $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t+1)^{t+1} - t - 1}{\ln(t+1) - t}$ ، کدام است؟

(۱) ۲

(۲) صفر

(۳) -۱

(۴) -۲

۲۸- اگر $0 < a_1 < b_1$ ، $(n \in \mathbb{N})$ ، $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ و $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱) دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو نزولی‌اند.

(۲) دنباله $\{a_n\}$ صعودی و دنباله $\{b_n\}$ نزولی است.

(۳) دنباله $\{a_n\}$ نزولی و دنباله $\{b_n\}$ صعودی است.

(۴) دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو صعودی‌اند.

۲۹- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} (2x+1)^n$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{e}$

(۲) $\frac{2}{e}$

(۳) $\frac{e}{2}$

(۴) e

۳۰- مقدار $\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۱- مقدار $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{4} - \ln 2$ (۲) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ (۳) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ (۴) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$

۳۲- کمترین فاصله سطح $xy + (x+y)z = 3$ از صفحه $x+y+z=0$ ، کدام است؟

(۱) $3\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴) صفر

۳۳- اگر $I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dA}{(1+x^2+y^2)^k}$ همگرا باشد، آنگاه کدام عبارت درست است؟

(۱) $I = \frac{\pi}{2(k-1)}, k > 1$ (۲) $I = \frac{\pi}{2k-1}, k \geq 1$ (۳) $I = \frac{\pi}{k-1}, k > 1$ (۴) $I = \frac{\pi}{k-1}, k \geq 1$

۳۴- فرض کنید $\vec{F}(x,y,z) = (xe^x + y)\hat{i} - (y^2 + z)\hat{j} + (ze^z + 2x)\hat{k}$ و C منحنی $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ در جهت

مثبت باشد. مقدار $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ، کدام است؟

(۱) -2π

(۲) $-\pi$

(۳) π

(۴) 2π

۳۵- شعاع انحنای دایره مماسی (بوسان) منحنی $\vec{r}(t) = \sinh(t)\hat{i} + \cosh(t)\hat{j}$ در لحظه $t = \ln 2$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{17\sqrt{34}}{16}$

(۲) $\frac{17\sqrt{34}}{32}$

(۳) $\frac{32}{17\sqrt{34}}$

(۴) $\frac{16}{17\sqrt{34}}$

۳۶- کدام مورد نقیض گزاره زیر است؟

«تابع $f: A \rightarrow B$ دوسویی است.»

(۱) $(\exists a, a' \in A (a \neq a' \wedge f(a) = f(a'))) \vee (\exists b \in B \forall a \in A f(a) \neq b)$

(۲) $(\exists a, a' \in A (a \neq a' \wedge f(a) = f(a'))) \wedge (\forall a \in A \exists b \in B f(a) \neq b)$

(۳) $(\exists a, a' \in A (f(a) \neq f(a') \Rightarrow a \neq a')) \vee (\exists b \in B \forall a \in A f(a) \neq b)$

(۴) $(\exists a, a' \in A (f(a) \neq f(a') \Rightarrow a \neq a')) \vee (\forall a \in A \exists b \in B f(a) \neq b)$

۳۷- فرض کنید $x \in I = (0, 1]$ و $A_x = \left\{ t : 0 < t < \frac{1}{x} \right\}$. کدام مورد نادرست است؟

(۱) $\bigcap_{x \in I} A_x = (0, 1)$

(۲) $\bigcup_{x \in I} A_x = (0, \infty)$

(۳) $\bigcup_{y \in I} \left(\bigcap_{0 < x \leq y} A_x \right) = (0, \infty)$

(۴) $\bigcap_{y \in I} \left(\bigcup_{y \leq x \leq 1} A_x \right) = \emptyset$

۳۸- رابطه هم‌ارزی \equiv را بین زیرمجموعه‌های \mathbb{N} با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

برای $A \equiv B$ ، $A, B \subseteq \mathbb{N}$ یعنی مجموعه $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ متناهی است.

کدام مورد نادرست است؟

(۱) رابطه هم‌ارزی \equiv ترتیب جزئی نیست.

(۲) مجموعه رده‌های هم‌ارزی شمارای نامتناهی است.

(۳) هر رده هم‌ارزی شمارای نامتناهی است.

(۴) همه زیرمجموعه‌های متناهی \mathbb{N} در یک رده هم‌ارزی قرار دارند.

۳۹- فرض کنید $f: X \rightarrow X$ یک تابع باشد و عمل دوتایی Δ بین زیرمجموعه‌های X با ضابطه زیر تعریف گردد:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

کدام مورد نادرست است؟

$$f^{-1}(A \Delta B) \subseteq f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B) \quad (۲) \quad f(A) \Delta f(B) \subseteq f(A \Delta B) \quad (۱)$$

$$f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \Delta B) \quad (۴) \quad f(A \Delta B) \subseteq f(A) \Delta f(B) \quad (۳)$$

۴۰- با فرض پذیرش اصل انتخاب، کدام مورد نادرست است؟

(۱) اگر تابعی پوشا از X به Y موجود باشد، آنگاه تابعی یک‌به‌یک از Y به X موجود است.

(۲) اگر α و β دو عدد اصلی باشند آنگاه $\alpha \leq \beta$ یا $\beta \leq \alpha$.

(۳) هر مجموعه مرتب جزئی حداقل یک زنجیر بیشین (ماکسیمال) و یک زنجیر کمین (مینیمال) دارد.

(۴) اگر (A, \leq) مجموعه مرتب جزئی باشد و هر زیرمجموعه کلاً مرتب آن در A کران بالا داشته باشد، آنگاه

A عضو کمین (مینیمال) دارد.

۴۱- فرض کنید T یک عملگر خطی روی P_2 (فضای چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر ۲) با ضابطه

$$T(f(x)) = f(x) + (x+1)f'(x)$$

باشد. در این صورت مقادیر ویژه T کدامند؟

$$(۱) \quad ۲$$

$$(۲) \quad ۱ \text{ و } ۲$$

$$(۳) \quad ۱, ۲, ۳$$

$$(۴) \quad ۱, ۲, ۴$$

$$۴۲- \text{ فرض کنید } \begin{cases} g: M_{10}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ g(A) = \text{tr}(A) + \sum_{i=1}^{10} (a_{i1} + a_{1i}) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} h: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ h(z_1, z_2) = (0, |z_2|) \end{cases}$$

کدام یک از g و h روی \mathbb{C} تبدیل خطی هستند؟

(۱) فقط h

(۲) فقط g

(۳) هم g و هم h

(۴) نه g و نه h

۴۳- فرض کنید $A_{۲۰۲۳ \times ۱۴۰۲}$ یک ماتریس روی \mathbb{C} باشد. در این صورت کدام مورد درست است؟

(۱) از این که $Ab = 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت $b = 0$.

(۲) از این که $A^t a = 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت $a = 0$.

(۳) بردار ستونی مناسب $b \neq 0$ موجود است که $Ab = 0$.

(۴) بردار ستونی مناسب $a \neq 0$ موجود است که $A^t a = 0$.

۴۴- فرض کنید $M = \begin{pmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times n} \\ C_{n \times n} & D_{n \times n} \end{pmatrix}$ یک ماتریس $2n \times 2n$ بلوکی و معکوس پذیر باشد که $n \geq 3$ و

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E_{n \times n} & F_{n \times n} \\ G_{n \times n} & H_{n \times n} \end{pmatrix}$$

در این صورت $\det(M) \det(H)$ برابر است با:

(۱) $\det(A)$

(۲) $\det(B)$

(۳) $\det(C)$

(۴) $\det(D)$

۴۵- فرض کنید $A \in M_{\mathbb{F}}(\mathbb{R})$ ماتریسی ناصفر و متقارن باشد که $A^T = A$. در این صورت اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه

A باشند، حاصل کسر $\frac{(\text{tr}(A))^2}{\text{rank}(A) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\text{tr}(A)$

(۳) $\text{rank}(A)$

(۴) ۴

۴۶- برای سری $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\text{Log} n}$ ، کدام مورد درست است؟ (نماد Log برای لگاریتم طبیعی است).

(۱) واگراست. (۲) همگرای مشروط است.

(۳) همگرا به $\frac{1}{e}$ است. (۴) همگرا به $\frac{1}{e(e-1)}$ است.

۴۷- چند جمله‌ای درجه سه $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را در نظر می‌گیریم. کدام شرط، دوسویی بودن P را ایجاب می‌کند؟

(۱) $b^2 \leq 3ac$

(۲) $a^2 \leq 3bc$

(۳) $3b^2c \leq a^2$

(۴) $a^2 \leq 3b^2c$

۴۸- فرض کنید تابع حقیقی f بر $[a, b]$ صعودی باشد. کدام مورد درباره تابع $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ بر $[a, b]$.

نادرست است؟

(۱) محدب است. (۲) صعودی است.

(۳) Lipschitz است. (۴) پیوسته است.

۴۹- مجموعه‌های $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right]$ و $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$ را در نظر می‌گیریم. کدام مورد درست است؟

(۱) هر دو مجموعه باز هستند.

(۲) مجموعه A باز و مجموعه B بسته است.

(۳) مجموعه A بسته و مجموعه B باز است.

(۴) هر دو مجموعه بسته هستند.

۵۰- از کدام مورد، پیوستگی یکنواخت تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نتیجه می‌شود؟

(۱) f پیوسته و یک‌به‌یک است.

(۲) f دارای مشتق پیوسته است.

(۳) f پیوسته، کراندار و یکنواست.

(۴) برای هر دنباله کوشی $\{x_n\}$ در \mathbb{R} ، دنباله $\{f(x_n)\}$ کوشی است.

۵۱- در یک دستگاه دودویی ممیز شناور نرمال شده، هر عدد ناصفر حقیقی به صورت $\pm d_1 d_2 d_3 d_4 \dots \times 2^E$ نمایش داده می‌شود، که در آن، e یک عدد سه‌رقمی در مبنای ۲ و ارقام d_i صفر یا یک بوده و $d_1 \neq 0$. فرض کنید

$x = (0/1011)_2 \times 2^0$ و $y = (0/1100)_2 \times 2^0$. کدام جفت از اعمال ماشینی زیر، بدون خطا محاسبه می‌شوند؟

$$(1) \quad y + \frac{x}{4}, \quad x + \frac{y}{4}$$

$$(2) \quad y + \frac{x}{4}, \quad x + y$$

$$(3) \quad x + y, \quad x - y$$

$$(4) \quad x + \frac{y}{4}, \quad x - y$$

۵۲- مرتبه همگرایی روش تکرار ساده با فرمول بازگشتی $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 2R)}{3x_n^2 + R}$ ، $n \in \mathbb{N}$ که در آن $x_0 = -R < 0$ مفروض می‌باشد، کدام است؟

$$(1) \quad 4$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad 2$$

$$(4) \quad 1$$

۵۳- فرض کنید برای درون‌یابی تابع $f(x) = e^{-x}$ از پنج نقطه $0, \pm x_1, \pm x_2, \pm x_3$ در بازه $[-1, 1]$ ، استفاده کنیم.

کوچک‌ترین کران بالای قابل‌اثبات برای خطای مطلق درون‌یابی در هر نقطه $x \in [-1, 1]$ از بین موارد زیر، کدام است؟

$$(1) \quad \frac{4}{15} e$$

$$(2) \quad \frac{e}{24}$$

$$(3) \quad \frac{e}{120}$$

$$(4) \quad \frac{e}{720}$$

۵۴- فرض کنید منحنی $y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ چهار نقطه $(0, 5)$ ، $(1, 3)$ ، $(2, 3)$ و $(3, 1)$ را به روش کمترین

مربعات خطا برازش کند. در این صورت، اثر (مجموع عناصر قطری) ماتریس ضرایب در معادلات نرمال، کدام است؟

(c_0, c_1 و c_2 مقادیر ثابت و مجهول‌اند.)

$$(1) \quad 116$$

$$(2) \quad 106$$

$$(3) \quad 63$$

$$(4) \quad 58$$

۵۵- فرض کنید $\{a + ih\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله باشد که در آن، $h > 0$ یک عدد ثابت حقیقی و $f(x_i) = f_i, (i \in \mathbb{N})$ است. اگر بخواهیم مقدار $f''(x_i)$ را با دقت مرتبه h^4 با فرمول

$$\frac{A_1 f_{i-2} + A_2 f_{i-1} + A_3 f_i + A_4 f_{i+1} + A_5 f_{i+2}}{h^2}$$

تقریب بزنیم، مقدار A_3 کدام است؟

(۱) $-\frac{7}{2}$ (۲) -3

(۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) -2

۵۶- برای انجام یک پروژه داده کاوی، از دو الگوریتم A و B استفاده می‌شود. میانگین و انحراف معیار زمان اجرای این دو الگوریتم به ترتیب برای A برابر ۷۵ و ۵ ثانیه و برای B برابر ۸۵ و ۱۰ ثانیه است. در خصوص تغییرات زمان اجرای این دو الگوریتم، چه اظهارنظری می‌توان نمود؟

(۱) الگوریتم A کمتر است. (۲) الگوریتم B، کمتر است.

(۳) نمی‌توان دو الگوریتم را مقایسه نمود. (۴) دو الگوریتم، از نظر تغییرات یکسان هستند.

۵۷- یک رشته از کاراکترهای مختلف را در نظر بگیرید، به نحوی که یک کاراکتر خاص قرار است در وسط آنها قرار بگیرد. برای یک رشته ۷ تایی (شامل این کاراکتر خاص)، چند روش مختلف برای قرار گرفتن کاراکترها در این رشته وجود دارد؟

(۱) ۵۰۴۰

(۲) ۲۸۲۰

(۳) ۷۲۰

(۴) ۳۶۰

۵۸- در یک کامپیوتر شامل d فایل داده، احتمال خراب شدن هر فایل مستقل از سایر فایل‌ها، یکسان است. می‌دانیم هر شوک وارد شده به کامپیوتر، دقیقاً یک فایل از d فایل را خراب می‌کند. اگر احتمال خراب نشدن دو فایلی که اخیراً روی کامپیوتر ایجاد شده، در اثر یک شوک برابر $\frac{4}{5}$ باشند، احتمال خراب نشدن هیچ‌یک از ۳ فایلی که اخیراً ایجاد شده‌اند، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{7}{10}$

(۳) $\frac{3}{10}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۵۹- براساس پژوهش صورت گرفته در مقالات حوزه یادگیری ماشینی، در آنها حداقل یکی از الگوریتم‌های مبتنی بر شبکه‌های عصبی مصنوعی یا الگوریتم‌های مبتنی بر آمار بیزی استفاده شده است. اگر a درصد از مقالات از الگوریتم‌های شبکه عصبی و b درصد از الگوریتم‌های آمار بیزی و c درصد فقط از الگوریتم‌های شبکه عصبی استفاده کرده باشند، چند درصد از این مقالات، فقط از الگوریتم‌های مبتنی بر آمار بیزی استفاده کرده‌اند؟

(۱) $\frac{b-a+2c}{100}$ (۲) $\frac{b-a-2c}{100}$

(۳) $\frac{b-a-c}{100}$ (۴) $\frac{b-a+c}{100}$

۶۰- یک برنامه کامپیوتری به زبان پایتون، در معرض سه نوع خطای متداول A، B و C است. احتمال این که این برنامه در معرض خطاهای A و B و نه C قرار گیرد، $\frac{5}{12}$ است. احتمال این که برنامه هر سه خطا را داشته باشد، به شرط این که دو خطای A و B را داشته باشد، $\frac{1}{3}$ است. احتمال این که این برنامه هر سه خطا را داشته باشد، چقدر است؟

(۱) ۰/۰۶

(۲) ۰/۱۶

(۳) ۰/۳۳

(۴) ۰/۴۵

ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه:

۶۱- فرض کنید یک الگوریتم با زمان اجرای $f(n)$ برای تعیین میانه اعضای یک آرایه n عضوی موجود است. به کمک این الگوریتم بهترین زمان اجرای الگوریتم مرتب‌سازی سریع، چقدر است؟

(۱) $O(n f(n))$ (۲) $O(f(n) \log n)$ (۳) $O(n f(n) \log n)$ (۴) $O((n + f(n)) \log n)$

۶۲- کدام مورد، در خصوص پیمایش BFS یک گراف همبند n راسی با شروع از راس v درست است؟

(۱) زمان اجرای آن $O(n)$ است.

(۲) در این الگوریتم هر یال دقیقاً دوبار بررسی می‌شود.

(۳) رئوس براساس کمترین فاصله از راس v ملاقات می‌شوند.(۴) برای یک گراف دوبخشی ابتدا گره‌های بخش مقابل v و سپس گره‌های بخش شامل v ملاقات می‌شوند.

۶۳- در مورد ادغام i لیست مرتب با مجموع تعداد اعضای n ، کدام مورد درست است؟

(۱) فقط برای $i = 2$ این کار در زمان $O(n)$ قابل انجام است.(۲) به ازای هر مقدار دلخواه i این کار در زمان $O(n)$ قابل انجام است.(۳) به ازای $i > 2$ این کار در زمان $\Omega(n \log n)$ قابل انجام است.(۴) فقط به ازای هر مقدار ثابت i این کار در زمان $O(n)$ قابل انجام است.

۶۴- کدام مورد، در خصوص الگوریتم دایکسترا برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از گره v به سایر گره‌ها برای یک گراف n راسی و شامل m یال، درست نیست؟

(۱) زمان اجرای الگوریتم $O(m + n \log n)$ است.

(۲) این الگوریتم حریصانه عمل می‌کند و پسگرد (back-track) ندارد.

(۳) این الگوریتم را می‌توان برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر هر زوج رأس نیز استفاده کرد.

(۴) این الگوریتم برای گراف‌های با وزن یال منفی به شرطی که دور با وزن منفی نداشته باشند، قابل استفاده است.

۶۵- زمان اجرای دو برنامه A و B در بدترین حالت به ترتیب از $15n \lg n$ و n^2 بیشتر نیستند. کدام مورد، درست است؟

(۱) برنامه B به‌طور متوسط و برای n های بزرگ، از برنامه A بهتر است.(۲) برنامه A به‌طور متوسط و برای n های کوچک، از برنامه B بهتر است.

(۳) احتمالاً برنامه A از نظر برنامه‌نویسی ساده‌تر است.

(۴) برای برخی از ورودی‌ها برنامه B سریع‌تر از برنامه A است.

۶۶- ماتریس وزن‌ها برای یک گراف در زیر داده شده است، وزن درخت فراگیر با کمترین وزن در این گراف چقدر است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 18 & 9 & 3 & 7 & 12 \\ 18 & 0 & 14 & 20 & 13 & 18 \\ 9 & 14 & 0 & 25 & 16 & 4 \\ 3 & 20 & 25 & 0 & 5 & 22 \\ 7 & 13 & 16 & 5 & 0 & 17 \\ 12 & 18 & 4 & 22 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

۳۴ (۴)

۳۳ (۳)

۳۲ (۲)

۳۱ (۱)

۶۷- بهترین الگوریتم برای یافتن کوتاه‌ترین مسیرها بین تمام جفت رئوس (all pair shortest path) در یک گراف داده شده کدام است؟

(۲) فلویید - وارشال (Floyd-warshall)

(۱) پرایم (Prime)

(۴) دایکسترا (Dijkstra)

(۳) کروسکال (Kruskal)

۶۸- اگر n اندازه ورودی الگوریتم و c و d اعداد ثابت باشند، مرتبه تابع بازگشتی زیر چیست؟

$$\begin{cases} T(1) = c \\ T(n) = 2T(n-1) + d, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

 $O(2^n)$ (۲) $O(n)$ (۱) $O(n \log n)$ (۴) $O(n^2)$ (۳)

۶۹- حداقل مرتبه زمانی الگوریتمی که در یک گراف داده شده با n رأس و تعداد یال دلخواه، تمام مسیرهای ممکن بین دو رأس i و j را به دست می‌آورد، چیست؟

 $O(2^n)$ (۲) $O(n)$ (۱) $O(n^3)$ (۴) $O(n^2)$ (۳)

۷۰- زمان بدترین حالت برای یافتن عنصر مینیمم در یک درخت جستجوی دودویی (binary search tree) چیست؟

 $O(n^2)$ (۲) $O(n)$ (۱) $O(n \log n)$ (۴) $O(\log n)$ (۳)

۷۱- کدام مورد در خصوص یک درخت جستجوی دودویی برای n عدد صحیح است؟

(۲) دارای حداقل $\log n$ برگ است.(۱) می‌تواند دارای $n-1$ برگ باشد.(۴) عمق آن $\log n$ یا $\log n + 1$ است.(۳) عمق آن حداکثر $n-1$ است.

۷۲- آرایه A شامل n عنصر مرتب (از اندیس ۱ تا n) و k عنصر نامرتب (از اندیس $n+1$ تا $n+k$) است و k

مستقل از n و بسیار کمتر از آن می‌باشد. کدام یک از الگوریتم‌های زیر برای مرتب‌سازی این آرایه به کمترین

تعداد مقایسه نیاز دارد؟

(۴) مرتب‌سازی حبابی

(۳) مرتب‌سازی ادغامی

(۲) مرتب‌سازی سریع

(۱) مرتب‌سازی درجی

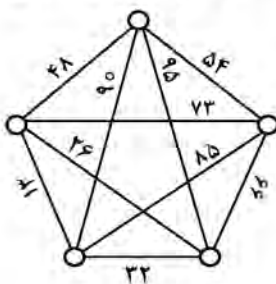
۷۳- در الگوریتم کروسکال برای گراف زیر، کدام یال انتخاب نخواهد شد؟

۵۴ (۱)

۳۲ (۲)

۲۶ (۳)

۱۳ (۴)



۷۴- کدام یک در خصوص الگوریتم دایکسترا (Dijkstra) نادرست است؟

(۱) برچسب قطعی رأس‌ها در طول الگوریتم به ترتیب غیرنزولی است.

(۲) برای گراف با n رأس، زمان اجرا $O(n^2)$ است.

(۳) فقط برای گراف‌هایی که دور جهت‌دار ندارند، جواب درست می‌دهد.

(۴) فقط برای گراف‌هایی که وزن همه یال‌های آنها نامنفی باشد، جواب درست می‌دهد.

۷۵- حاصل جمع مجموع اعضای همه زیرمجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ چند است؟

(۱) ۱۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۳۲ (۴) ۲۴

۷۶- کدام مورد در خصوص درخت جستجوی دودویی بهینه نادرست است؟

(۱) ممکن است عمق آن برابر $\frac{2n}{3}$ باشد.

(۲) ممکن است عمق آن برابر $\frac{3n}{4}$ باشد.

(۳) درخت دودویی با n رأس است که تمام برگ‌های آن در سطوح n ام و $n-1$ ام باشند.

(۴) کلیدهای پرتکرارتر، در سطوح کمتری (نزدیک‌تر به ریشه) قرار می‌گیرند.

۷۷- با استفاده از درخت فضای حالت، کدام روش‌ها به ترتیب برای حل سه مسئله زیر مناسب است؟

- مسئله n وزیر در صفحه شطرنج $n \times n$

- رنگ‌آمیزی گراف

- مجموع زیرمجموعه‌ها (Subset Sum)

(۱) بازگشت به عقب، شاخه و کران، شاخه و کران

(۲) شاخه و کران، بازگشت به عقب، شاخه و کران

(۳) بازگشت به عقب، بازگشت به عقب، شاخه و کران

(۴) بازگشت به عقب، بازگشت به عقب، بازگشت به عقب

I - $f(n) + O(f(n)) \in \theta(f(n))$

II - $f(n) \in \Omega(\sqrt{f(n)})$

III - $f(n) + f^2(n) + \sqrt{f(n)} \in \theta(f(n))$

(۱) فقط I

(۲) I و II

(۳) II و III

۷۸- کدام کدها نمی‌توانند طبق الگوریتم هافمن، به عنوان بخشی از کدگذاری برای کاراکترها هم‌زمان تولید شوند؟

(۱) ۱۱, ۱۰, ۰۱۱, ۰۱۰

(۲) ۰۱۱۱, ۰۱۱۰, ۰۱۰۱, ۱

(۳) ۱۰۱۱, ۰۱۰۱, ۱۱۰, ۱۰۰, ۰۱۱۱

(۴) ۱۰۰۱, ۱۰۱۱, ۰۱۰۱, ۱۰۰, ۰۱۱

۸۰- حاصل رابطه بازگشتی زیر چیست؟

$$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^{0.51} & n > 1 \\ T(1) = 1 & n = 1 \end{cases}$$

(۱) $O(n^{0.51} \log n)$

(۲) $O(\sqrt{n} \log n)$

(۳) $O(n^{0.51})$

(۴) $O(\sqrt{n})$

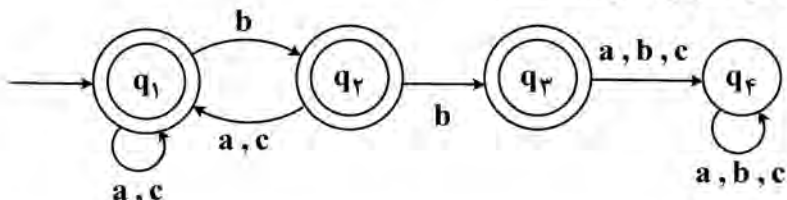
۸۱- فرض کنیم L یک زبان دارای DFA بر الفبای Σ باشد و $a \in \Sigma$. کدام مورد در خصوص زبان

$$L' = \{w \in \Sigma^* : wa \in L\}$$

- (۱) مستقل از متن نیست.
 (۲) منظم نیست، ولی خطی است.
 (۳) منظم نیست، ولی مستقل از متن است.
 (۴) منظم است.

۸۲- DFA زیر، بر $\Sigma = \{a, b, c\}$ مفروض است. اگر t تعداد رشته‌های به طول ۳ یا کمتر باشد که توسط این

DFA پذیرفته می‌شود، کدام مورد در خصوص t درست است؟



- (۱) $t \in [10, 20]$
 (۲) $t \in [0, 10]$
 (۳) $t \in [30, +\infty)$
 (۴) $t \in (20, 30)$

۸۳- اگر L زبان عبارت منظم $1^* 0^*$ باشد و $\alpha = 100101011011$ و $\beta = 0101000110011$. کدام

مورد درست است؟

- (۱) $\alpha \in L$ و $\beta \in L$
 (۲) $\alpha \notin L$ و $\beta \in L$
 (۳) $\alpha \in L$ و $\beta \notin L$
 (۴) $\alpha \notin L$ و $\beta \notin L$

۸۴- فرض کنیم زبان‌های $L_A \subseteq \Sigma^*$ و $L_B \subseteq \Sigma^*$ توسط DFAهای $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A)$ و

$B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q'_0, F_B)$ داده شده‌اند و $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. اتوماتای C را با زبان L_C به صورت زیر در

نظر می‌گیریم:

$$C = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta_C, (q_0, q'_0), F_A \times F_B)$$

$$\delta_C((p, q), a) = \{(p', q) : p' \in \delta_A(p, a)\}$$

$$\cup \{(p, q') : q' \in \delta_B(q, a)\}$$

دو عبارت زیر، مفروض است.

I: اگر $010 \in L_A$ و $210 \in L_B$ آنگاه $021100 \in L_C$

II: اگر $010 \in L_A$ و $210 \in L_B$ آنگاه $210010 \in L_C$

کدام موارد فوق، همواره درست است؟

- (۱) فقط I
 (۲) فقط II
 (۳) هم I و هم II
 (۴) نه I و نه II

۸۵- دو زبان L_1 و L_2 را بر $\Sigma = \{0, 1\}$ به صورت زیر، در نظر می‌گیریم:

$$L_1 = \{0^n 10^n : n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{w : \text{تعدادی فرد } 0 \text{ دارد.}\}$$

از این دو زبان، کدام منظم است؟

- (۱) فقط L_1
 (۲) فقط L_2
 (۳) هم L_1 و هم L_2
 (۴) نه L_1 و نه L_2

۸۶- دو زبان L_1 و L_2 را بر $\Sigma = \{a, b\}$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L_1 = \{w : n_a(w) = n_b(w) \text{ و } w \text{ شامل زیررشته } aab \text{ نیست}\}$$

$$L_2 = \{a^n b^j a^j b^n : n, j \geq 0\}$$

از این دو زبان، کدام مستقل از متن است؟

- (۱) فقط L_1
 (۲) فقط L_2
 (۳) هم L_1 و هم L_2
 (۴) نه L_1 و نه L_2

۸۷- دو زبان L_1 و L_2 را بر $\Sigma = \{a, b\}$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L_1 = \{a^n b^j a^n b^j : n, j \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^j : 0 \leq n \leq j^2\}$$

از این دو زبان، کدام مستقل از متن است؟

- (۱) فقط L_1
 (۲) فقط L_2
 (۳) هر دو
 (۴) نه L_1 و نه L_2

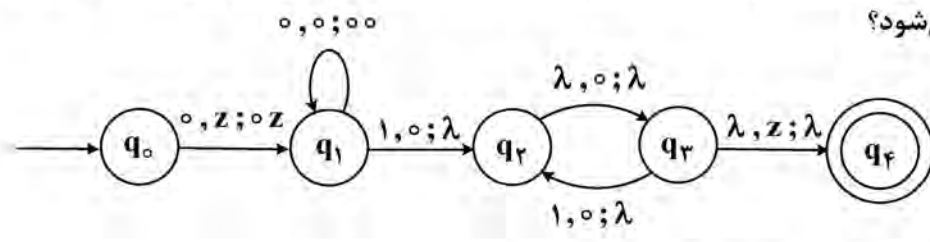
۸۸- گرامر G با متغیر شروع S بر $\Sigma = \{a, b, c\}$ با قوانین تولید زیر را در نظر می‌گیریم:

- $S \rightarrow XY | W$
 $X \rightarrow aXb | \epsilon$
 $Y \rightarrow CY | \epsilon$
 $W \rightarrow aWc | z$
 $Z \rightarrow bZ | \epsilon$

با قرار گرفتن کدام یک از دو مقدار b یا c به جای α در $\alpha c^{1400} b^{1401} a^{1402} w$ ، رشته w حاصل در $L(G)$ قرار می‌گیرد؟

- (۱) فقط c
 (۲) فقط b
 (۳) هم b هم c
 (۴) نه b و نه c

۸۹- اتوماتای پشت‌های زیر مفروض است. اگر $\alpha = 000011$ و $\beta = 000101010$ ، کدام یک از این دو رشته، توسط این اتوماتا پذیرش می‌شود؟



- (۱) فقط α
 (۲) فقط β
 (۳) هم α هم β
 (۴) نه α و نه β

۹۰- ماشین تورینگ M با جدول انتقال زیر، داده شده است:

| حالت \ نماد | S | o | 1 | # |
|-------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| q_0 | (q_R, S, R) | — | — | — |
| q_R | — | (q_R, o, R) | $(q_R, 1, R)$ | $(q_1, \#, L)$ |
| q_1 | $(q_f, 1, L)$ | $(q_L, 1, L)$ | (q_1, o, L) | — |
| q_L | (q_f, S, R) | (q_L, o, L) | $(q_L, 1, L)$ | — |
| q_f | — | — | — | — |

کدام یک از دو مورد زیر، درباره M درست است؟

- I: $q_0 S 1001 \vdash^* S q_f 10100$
 II: $q_0 S 101010 \vdash^* S q_f 101110$
 (۱) فقط I
 (۲) فقط II
 (۳) هم I و هم II
 (۴) نه I و نه II

مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها:

۹۱- کدام یک از دو استدلال زیر، معتبر است؟

(a)

تمام اعداد گویا حقیقی هستند.

بعضی اعداد مختلط، گویا نیستند.

بنابراین: بعضی اعداد مختلط، حقیقی نیستند.

(b)

اگر من درس را پاس کرده باشم، آنگاه در میان ترم نمره خوبی گرفته‌ام.

اگر من درس را پاس کرده باشم، آنگاه در پایان ترم نمره خوبی گرفته‌ام.

من در میان ترم و پایان ترم نمره خوبی گرفته‌ام.

بنابراین: من درس را پاس کرده‌ام.

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

(۲) فقط (b)

(۱) فقط (a)

۹۲- از دو فرمول زیر، کدام یک در فرم نرمال فصلی (DNF) است؟ (p_i ها اتم‌اند).

$$\alpha = p_1 \wedge \neg p_2$$

$$\beta = p_1 \vee (\neg p_2 \vee \neg p_3)$$

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

(۲) فقط β

(۱) فقط α

۹۳- در زبان $L = \{ \leq \}$ شامل یک رابطه دوتایی، فرض کنیم Σ_{DLO} نظریه ترتیب‌های خطی چگال بدون نقاط انتهایی باشد. از دو مورد زیر، کدام یک درست است؟

I - اگر u_1 و u_2 ساختارهای شمارا برای Σ_{DLO} باشند، در این صورت u_1 و u_2 یکریخت هستند.

II - Σ_{DLO} کامل است، یعنی برای هر جمله σ یا $\Sigma_{DLO} \vdash \sigma$ یا $\Sigma_{DLO} \vdash \neg \sigma$.

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

(۲) فقط II

(۱) فقط I

۹۴- فرض کنیم $\alpha = (q \rightarrow p) \rightarrow r$ و $\beta = q \rightarrow (r \rightarrow p)$. کدام مورد در خصوص استلزام منطقی α و β صحیح است؟

(۱) α مستلزم β است، ولی β مستلزم α نیست.

(۲) β مستلزم α است، ولی α مستلزم β نیست.

(۴) هیچ کدام، مستلزم دیگری نیست.

(۳) هر کدام، مستلزم دیگری است.

۹۵- فرض کنیم:

سالم زندگی می‌کنیم: S

کمتر از ماشین‌ها استفاده می‌کنیم: K

می‌توانیم زندگی خوبی داشته باشیم: G

کدام مورد، بهترین ترجمه برای عبارت زیر است:

«اگر سالم زندگی می‌کنیم مگر آنکه کمتر از ماشین‌ها استفاده کنیم، آنگاه نمی‌توانیم زندگی خوبی داشته باشیم.»

$$(2) (\neg K \rightarrow S) \rightarrow \neg G$$

$$(1) S \rightarrow (\neg K \rightarrow \neg G)$$

$$(4) (K \rightarrow S) \rightarrow \neg G$$

$$(3) S \rightarrow (K \rightarrow \neg G)$$

۹۶- از دو عبارت زیر، کدام صحیح است؟

الف - جملات $\exists x(P(x) \wedge \exists xQ(x))$ و $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ معادل منطقی هستند.

ب - جملات $\exists x(P(x) \vee \exists xQ(x))$ و $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ معادل منطقی هستند.

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

(۲) فقط (ب)

(۱) فقط (الف)

۹۷- فرض کنیم Φ_n جمله زیر در زبان گرافها باشد:
 «برای هر زوج (A, B) با مؤلفه اول و دوم زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها که $|A| = |B| = n$ و $A \cap B = \emptyset$ ، رأس $V \notin A \cup B$ وجود دارد که برای هر $w \in A$ داریم $v \in Ew$ و برای هر $w \in B$ داریم $v \in Ew$ ».

فرض کنیم $T^* = T_{\text{graphs}} \cup \{\Phi_n : n > 0\}$

دو عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف - T^* حداقل یک مدل شمارای نامتناهی دارد.

ب - T^* دارای دو مدل شمارای نامتناهی غیریکریخت است.

از دو عبارت فوق، کدام صحیح است؟

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۹۸- فرض کنیم:

$K(x)$: x کارخانه است

$C(x)$: x خودرو است

$P(x)$: x شخص است

$H(x)$: x پلاک فعال دارد

$S(x, y, z)$: x را به y می‌فروشد z

کدام مورد، ترجمه صحیح عبارت زیر است:

«کارخانه‌ای هست که فقط به افرادی که پلاک فعال ندارند، خودرو می‌فروشد.»

(۱) $\forall x [k(x) \rightarrow \forall y, z (P(z) \wedge \neg H(z) \rightarrow C(y) \wedge S(x, y, z))]$

(۲) $\forall x [k(x) \rightarrow \forall y, z (C(y) \wedge S(x, y, z) \rightarrow P(z) \wedge \neg H(z))]$

(۳) $\exists x k(x) \wedge \forall z [(P(z) \wedge \neg H(z) \rightarrow \exists y (C(y) \wedge S(x, y, z)))]$

(۴) $\exists x k(x) \wedge \forall y, z [(C(y) \wedge S(x, y, z)) \rightarrow (P(z) \wedge \neg H(z))]$

۹۹- فرض کنیم $L = \{P\}$ زبان مرتبه اول باشد که P نماد رابطه‌ای دوتایی است. سه عبارت زیر را در نظر بگیرید.

۱ - $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow (P(x, z)))$

۲ - $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow (P(y, x) \rightarrow x = y))$

۳ - $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$

از دو عبارت زیر، کدام همواره صحیح است؟

الف - از (۱) و (۲) می‌توان (۳) را نتیجه گرفت.

ب - از (۲) و (۳) می‌توان (۱) را نتیجه گرفت.

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۰۰- فرض کنیم $\langle \mathcal{M}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ دنباله‌ای از L -ساخت‌ها (L-structure) باشد که \mathcal{M}_n زیرساخت مقدماتی

\mathcal{M}_{n+1} باشد. قرار می‌دهیم $M = \bigcup_n \mathcal{M}_n$ و ساخت \mathcal{M} را با عالم سخن M به صورت طبیعی تعریف می‌کنیم.

کدام مورد، صحیح است؟

(۱) هر \mathcal{M}_n زیرساخت مقدماتی \mathcal{M} است.

(۲) همه \mathcal{M}_n ها زیرساخت \mathcal{M} هستند ولی ممکن است هیچ کدام زیرساخت مقدماتی \mathcal{M} نباشند.

(۳) همه \mathcal{M}_n ها زیرساخت \mathcal{M} هستند ولی حداقل یکی از \mathcal{M}_n ها زیرساخت مقدماتی \mathcal{M} است.

(۴) ممکن است هیچ کدام از \mathcal{M}_n ها زیرساخت \mathcal{M} نباشند.

۱۰۱- فرض کنیم A مجموعه همه توابع از \mathbb{N} به \mathbb{N} که یک به یک نیستند، و B مجموعه همه توابع یک به یک از \mathbb{N} به \mathbb{N} باشد. از این دو مجموعه، کدام با مجموعه اعداد گویا هم توان است؟

- (۱) فقط A (۲) فقط B
(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۰۲- فرض کنیم C مجموعه همه زیرمجموعه‌های شمارای $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ باشد. در این صورت، C با کدام مجموعه هم توان است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) Q (مجموعه اعداد گویا)
(۳) $\{0, 1\}$ (۴) $P(\mathbb{R})$ (مجموعه توانی اعداد حقیقی)

۱۰۳- از دو نتیجه زیر، کدام یک در نظریه مجموعه‌ها بدون اصل انتخاب، اثبات پذیر نیست؟
الف - اگر $|A| \leq |B|$ و $A \neq \emptyset$ در این صورت، تابع پوشای $f: B \rightarrow A$ وجود دارد.

- ب - اگر تابع پوشای $f: B \rightarrow A$ وجود داشته باشد، آنگاه $|A| \leq |B|$.
(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب)
(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۰۴- از دو عبارت زیر، کدام مورد درست است؟

الف - مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} را می‌توان طوری مرتب کرد که نوع ترتیب مجموعه حاصل، اوردینال $\omega + 2$ باشد.
ب - مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} را می‌توان طوری مرتب کرد که نوع ترتیب مجموعه حاصل، اوردینال $2 + \omega$ باشد.

- (۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب)
(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۰۵- اوردینال ω به صورت $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ تعریف می‌شود. کدام مورد در خصوص ω صحیح است؟

- الف - $\omega < \omega^3$ ب - $\omega < \omega^2$
(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب)
(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۰۶- فرض کنید $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. از دو مورد زیر، کدام عضو $P(x)$ است؟

- الف - $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
ب - $\{\{\emptyset\}\}$
(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب)
(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۰۷- مجموعه‌های A و B و C را به صورت زیر در نظر بگیرید:

- $A =$ مجموعه همه توابع از \mathbb{N} به $\{0, 1, 2\}$
 $B =$ مجموعه همه توابع از \mathbb{N} به \mathbb{N}
 $C =$ مجموعه همه توابع از \mathbb{Q} به \mathbb{R}

کدام مورد، درست است؟

- (۱) $|A| < |B| = |C|$ (۲) $|A| = |B| < |C|$
(۳) $|A| < |B| < |C|$ (۴) $|A| = |B| = |C|$

۱۰۸- فرض کنیم S مجموعه همه دنباله‌های نامتناهی از اعداد طبیعی و $P(S)$ مجموعه توانی S باشد. در این صورت تعداد توابع یک به یک و پوشا از S به $P(S)$ چقدر است؟

- (۱) ناشمارا (۲) صفر
(۳) متناهی ولی ناصفر (۴) شمارا ولی نامتناهی

۱۰۹- فرض کنیم x یک مجموعه است. قرار می‌دهیم:

$$a = \{\beta : \beta \text{ یک اوردینال است و تابع پوشای } x \rightarrow \beta \text{ وجود دارد} : \beta\}$$

با استفاده از اصول نظریه مجموعه‌ها (ZF) می‌توان دید که a یک مجموعه است. از دو مورد زیر، کدام یک در مورد a درست است؟

الف - a اوردینال ناصفر است.

ب - a کوچک‌ترین اوردینال است که $a \notin x$.

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب)

(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۱۰- از دو نتیجه زیر، کدام یک در نظریه مجموعه‌ها بدون اصل انتخاب، اثبات پذیر نیست؟

الف - اگر k کاردینالی باشد که $k \leq \aleph_0$ در این صورت $k = \aleph_0$ یا $k = n$ که $n \in \mathbb{N}$.

ب - اگر $|A| = \aleph_0$ در این صورت، کاردینال مجموعه همه دنباله‌های متناهی از اعضای A برابر \aleph_0 است.

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب)

(۳) هر دو (۴) هیچ کدام

ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات:

۱۱۱- به چند طریق می‌توان یک پلکان n تایی را طی کرد، به طوری که در هر قدم، یک پله یا دو پله بتوان طی کرد؟

(۱) ۳۴

(۲) ۵۵

(۳) ۸۹

(۴) ۱۴۴

۱۱۲- کوچک‌ترین مقدار n چقدر است، به طوری که هر زیرمجموعه n عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 49\}$ ، شامل سه

عدد صحیح x, y و z باشد، به طوری که $(x-y)(y-z)(z-x)$ بر ۴۹ بخش پذیر باشد؟

(۱) ۱۴

(۲) ۱۵

(۳) ۲۱

(۴) ۲۲

۱۱۳- چند رشته ۱۰ رقمی از ارقام ۱، ۲ و ۳ وجود دارد که یا در پنج رقم سمت چپ، هیچ رقمی برابر ۱ نباشد یا در

پنج رقم سمت راست، هیچ رقمی برابر ۲ نباشد؟

(۱) 2^{10}

(۲) $2^6 \times 2^{43}$

(۳) $2^6 \times 2^{27}$

(۴) $2^6 \times 3^5 - 1$

۱۱۴- می‌خواهیم اعداد دورقمی را در ۴۵ دسته متمایز ۲ تایی توزیع کنیم. به طوری که دو عدد ۱۰ و ۹۹ در یک دسته نباشند. به چند طریق، این دسته‌بندی امکان پذیر است؟

$$\frac{88!}{2^{44}} \quad (1)$$

$$\frac{89!}{2^{45}} \quad (2)$$

$$45 \times \frac{88!}{2^{44}} \quad (3)$$

$$\frac{88}{89} \times \frac{90!}{2^{45}} \quad (4)$$

۱۱۵- تعداد دسته جواب‌های معادله زیر در مجموعه اعداد صحیح، چقدر است؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 19$$

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, \dots, x_{10} \geq 10$$

$$\binom{54}{10} \quad (2)$$

$$\binom{54}{9} \quad (1)$$

$$\binom{45}{9} \quad (4)$$

$$\binom{45}{10} \quad (3)$$

۱۱۶- جواب معادله بازگشتی روبه‌رو چیست؟

$$c_1 2^n + c_2 (-2)^n \quad (1)$$

$$c_1 n 2^n + c_2 n (-2)^n \quad (2)$$

$$(c_1 + c_2 n) 2^n + (d_1 + d_2 n) (-2)^n \quad (3)$$

$$(c_1 + d_1) 2^n + (c_2 n + d_2 n) (-2)^n \quad (4)$$

۱۱۷- تعداد اعضای مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ که نسبت به ۴۵ اول هستند، کدام است؟

$$46 \quad (1)$$

$$47 \quad (2)$$

$$53 \quad (3)$$

$$71 \quad (4)$$

۱۱۸- فرض کنید گراف تابدیهی G ، یال برشی ندارد. کدام گزاره‌های زیر برای این گراف، درست است؟

(۱) هر یال گراف، روی یک دور است.

(۲) هر دو دور گراف، در یک یال مشترک هستند.

(۳) گراف، لزوماً همبند است.

(۴) گراف، رأس برشی ندارد.

۱۱۹- در کدام یک از گراف‌های وزن دار و همبند، کوچک‌ترین درخت فراگیر (MST)، یکتا نیست؟

(۱) در هر دور، وزن یال‌ها متمایز باشد.

(۲) گراف، دور نداشته باشد.

(۳) همه یال‌ها، وزن‌های متمایز داشته باشند.

(۴) فقط یک یال با کمترین وزن در گراف وجود داشته باشد.

۱۲۰- هر زیرمجموعه ۳ عضوی از مجموعه n عضوی X را یک رأس گراف G در نظر بگیرید ($n \geq 5$) و دو رأس A و B را توسط یک یال به هم وصل کنید. هرگاه $|A \cap B| = 1$. کدام مورد درباره این گراف، نادرست است؟
 (۱) گراف حاصل، منتظم است.

(۲) گراف حاصل برای هر $n \geq 5$ ، میلتنونی است.

(۳) تعداد یال‌های این گراف، برابر است با $q = 15 \binom{n}{5}$.

(۴) فاصله هر دو رأس گراف برای $n \geq 7$ ، حداکثر برابر است با ۲.

۱۲۱- در چند جایگشت از حروف $xx yy z www$ ، هیچ دو x متوالی وجود ندارد؟

(۱) $2 \times 3 \times 5 \times 7$ (۲) $2 \times 3 \times 7^2$

(۳) $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ (۴) $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$

۱۲۲- اگر $100!$ در مبنای ۱۰ نوشته شود، عدد حاصل به چند رقم صفر ختم می‌شود؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۱

(۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۱۲۳- به چند طریق، ۳ فیزیکدان و ۵ ریاضیدان می‌توانند دور یک میز بنشینند، به طوری که هیچ دو فیزیکدانی مجاور نباشند؟

(۱) ۷۲۰۰ (۲) ۱۴۴۰

(۳) ۳۶۰ (۴) ۲۸۸

۱۲۴- کوچک‌ترین مقدار n ، به طوری که گزاره زیر همیشه درست باشد، کدام است؟

«در هر زیرمجموعه n عضوی از $\{1, 2, \dots, 100\}$ ، چهار عدد متمایز وجود دارند، به طوری که مجموع مربعات آنها مضرب چهار است.»

(۱) ۷ (۲) ۱۰

(۳) ۱۳ (۴) ۵۴

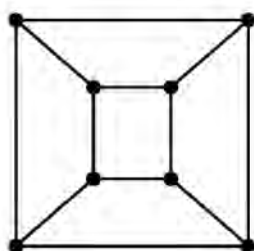
۱۲۵- تعداد مسیره‌های به طول ۲ در گراف Q_3 (شکل روبه‌رو)، کدام است؟

(۱) ۱۶

(۲) ۲۴

(۳) ۳۲

(۴) ۶۶



۱۲۶- به چند طریق، می‌توان ۱۰ کتاب متمایز را در سه ردیف از یک قفسه کتاب چید، به طوری که در هر قفسه، حداقل ۱ کتاب باشد؟ (ترتیب کتاب‌ها در هر ردیف، مهم است.)

(۱) $\frac{12!}{2}$ (۲) $72 \times 10!$

(۳) $18 \times 10!$ (۴) $36 \times 10!$

۱۲۷- فرض کنید $a_n = An + B$ جواب رابطه بازگشتی $a_{n+1} - 2a_n = n - 3$ باشد. مقدار $A + B$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۸- به چند طریق، می توان جدولی $2 \times n$ را با بلوک های 2×1 و 2×2 پوشاند؟

$$(1) \quad 2^{n+1} + (-1)^n \quad (2) \quad 2^n + (-1)^{n+1}$$

$$(3) \quad 2^n + (-1)^n \quad (4) \quad \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

۱۲۹- اگر $n \geq k \geq 0$ ، آنگاه حاصل $\sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k}$ کدام است؟

$$(1) \quad k 2^n \quad (2) \quad k 2^{n-k}$$

$$(3) \quad \binom{n}{k} 2^k \quad (4) \quad \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

۱۳۰- گراف دوری C_{20} را در نظر بگیرید. به چند طریق، می توان دو مسیر متمایز به طول ۵ انتخاب کرد، به طوری که

حداقل در یک یال اشتراک داشته باشند؟ (ترتیب دو مسیر انتخابی، مهم نیست.)

$$(1) \quad 90 \quad (2) \quad 80$$

$$(3) \quad 50 \quad (4) \quad 40$$