کد کنترل

534

C

534C

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوسته ـ سال ۱۴۰۴

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»
مقام معظم رهبری

صبح جمعه
۱۴۰۳/۱۲/۰۳

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

ریاضی (کد ۱۲۰۸)

تعداد سؤال: ۱۴۵ سؤال — مدت‌زمان پاسخگویی: ۲۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۲۵	۱	۲۵
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۰	۲۶	۶۵
۳	آنالیز ریاضی	۲۰	۶۶	۸۵
۴	مبانی جبر و مبانی ترکیبیات	۲۰	۸۶	۱۰۵
۵	جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۲۰	۱۰۶	۱۲۵
۶	احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی ۱	۲۰	۱۲۶	۱۴۵

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به‌منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سؤالات، نوع و کدکنترل درج‌شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

***Directions**: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.*

1- **My mother was a very strong, ... woman who was a real adventurer in love with the arts and sports.**
1) consecutive 2) independent
3) enforced 4) subsequent

2- **The weakened ozone ....., which is vital to protecting life on Earth, is on track to be restored to full strength within decades.**
1) layer 2) level
3) brim 4) ingredient

3- **Reading about the extensive food directives some parents leave for their babysitters, I was wondering if these lists are meant to ease ..... feeling for leaving the children in someone else's care.**
1) an affectionate 2) a misguided
3) an undisturbed 4) a guilty

4- **He is struck deaf by disease at an early age, but in rigorous and refreshingly unsentimental fashion, he learns to overcome his ..... so that he can keep alive the dream of becoming a physician like his father.**
1) ambition 2) incompatibility
3) handicap 4) roughness

5- **With cloak and suit manufacturers beginning to ..... their needs for the fall season, trading in the wool goods market showed signs of improvement this week.**
1) anticipate 2) nullify
3) revile 4) compliment

6- **Sculptors leave highly ..... footprints in the sand of time, and millions of people who never heard the name of Augustus Saint-Gaudens are well-acquainted with his two statues of Lincoln.**
1) insipid 2) sinister
3) conspicuous 4) reclusive

7- **To avoid liability, officers were told that they need to ..... closely to established department rules and demonstrate that probable cause for an arrest or the issuance of a summons existed.**
1) recapitulate 2) confide
3) hinder 4) adhere

PART B: Cloze Test

***Directions*: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.**

The first organized international competition involving winter sports .....(8) just five years after the birth of the modern Olympics in 1896. Known as the Nordic Games, this competition included athletes predominantly from countries such as Norway and Sweden. It was held eight times between 1901 and 1926, ...(9) all but one time. Figure skating was included in the Olympics for the first time in the 1908 Summer Games in London, ...(10) the skating competition was not actually held until October, some three months after the other events were over.

8- 1) was introducing 2) was introduced
3) introduced 4) has been introducing

9- 1) with Stockholm hosting 2) and Stockholm hosting
3) that Stockholm hosted 4) Stockholm hosted

10- 1) despite 2) although
3) otherwise 4) notwithstanding

PART C: Reading Comprehension

***Directions*: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.**

PASSAGE 1:

The traditional view of the nature of mathematics, which goes back at least as far as Plato and which is still current in mathematics departments today, is that mathematics is the purely rational study of immaterial forms. Mathematics, on this view, is concerned exclusively with objects like numbers, shapes, and functions which do not occur in the physical world, although they may have imperfect instances in the physical world. Thus, the geometer studies straight lines and perfect circles, but the lines he draws on the blackboard are not straight and the circles he draws are not perfect. Since the objects the mathematician studies are not physical, there is no way for him to have empirical knowledge about those objects. Thus, mathematics is an *a priori* discipline, independent of all experience. The Euclidean methodology, though rarely applied in practice, is still the ideal in principle. Mathematicians should deduce their theorems by logical inference from self-evident axioms. Any other source of mathematical knowledge may be heuristically useful, but is not strictly correct. As Plato says in *The Republic* (Book VI, 510), the objects that mathematicians study are "ideals which can be seen only by the mind".

11- The underlined word "instances" in the passage is closest in meaning to ..... .
1) examples 2) movements 3) processes 4) explanations

12- The underlined word "their" in the passage refers to ..... .
1) theorems 2) mathematicians
3) axioms 4) mathematics

13- All of the following words are mentioned in the passage EXCEPT ..... .
1) empirical 2) functions 3) circles 4) rhetorical

14- According to the passage, the view that mathematics is the purely rational study of immaterial forms ..... .
1) is still dominant in our age 2) has lost its currency in our times
3) has just become current in recent times 4) was challenged by Plato

15- According to the passage, which of the following statements is true?
1) Geometers intentionally avoid drawing straight lines and perfect circles.
2) Mathematicians are able to experiment with perfect shapes in the physical world.
3) Nowadays, the Euclidean methodology is not as frequently applied as it used to be.
4) Plato's *The Republic* is a primary source of mathematical knowledge.

PASSAGE 2:

In 1545 a book by Gerolamo Cardano appeared whose title began with the Latin words *Ars Magna* (The Great Art). It was essentially devoted to solving third- and fourth-order equations, but its value for the history of mathematics far surpassed the limits of this specific problem. Even in the 20th century, Felix Klein, evaluating this book, wrote, "This most valuable work contains the germ of modern algebra, surpassing the bounds of ancient mathematics."

The 16th century was the century in which European mathematics was reborn after the hibernation of the Middle Ages. For a thousand years the work of the great Greek geometers was forgotten, and in part irrevocably lost. From Oriental texts, the Europeans learned not only about the mathematics of the East but also about the ancient mathematics of the West. It is characteristic that in the spread of mathematics across Europe a major role was played by traders, for whom journeys were a means of both obtaining information and spreading it. The figure of Leonardo of Pisa (1180–1240), better known as Fibonacci (son of Bonacci), especially stands out. His name is immortalized by a remarkable numerical sequence (the Fibonacci numbers). Science can lose its royal status very quickly and centuries may be needed to reestablish it. For three centuries European mathematicians remained as apprentices, although Fibonacci undoubtedly did some interesting work. Only in 16th-century Europe did significant mathematical results appear that neither the ancient nor the Eastern mathematicians knew. We are talking about the solution of third- and fourth-degree equations.

16- According to paragraph 1, some scholars believe that Cardano' s book ..... .
1) was an impediment to the appearance of modern algebra
2) was seminal in terms of the emergence of modern algebra
3) far exceeded the limits of modern algebra
4) had more to do with the arts than with mathematics

17- According to paragraph 2, one of the functions of travelling for traders was ..... .
1) gaining and distribution of information
2) translation of Oriental texts into European languages
3) concealing information gained from other cultures
4) retaining and confinement of information

18- According to paragraph 2, prior to the 16th century, the solution of third- and fourth-degree equations was ..... .

1) forgotten and in part irrevocably lost during the Middle Ages
2) the only mathematical achievement of the Middle Ages
3) discovered by Gerolamo Cardano in his *Ars Magna*
4) unknown to Eastern and Western mathematicians alike

19- According to the passage, which of the following statements is NOT true?

1) Science can abruptly decline and the loss may need centuries to amend.
2) Leonardo of Pisa and Fibonacci were two contemporary mathematicians.
3) European mathematics was more or less unproductive for about 300 years.
4) Oriental texts helped Europeans in learning their own mathematics as well.

20- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?

1) What are some of Felix Klein's mathematical achievements?
2) In which year did Fibonacci develop his remarkable numerical sequence?
3) Why did Gerolamo Cardano call his book The Great Art?
4) In what era did Western mathematics experience a long period of inactivity?

PASSAGE 3:

The human brain is unique in the animal kingdom in its ability to gain access to abstract mathematical truths. How this singular cognitive ability evolved in the primate lineage is currently unknown. According to one hypothesis, mathematics, like other cultural abilities that appeared suddenly with modern humans in the upper Paleolithic, is an offshoot of the human language faculty—for Noam Chomsky, for instance, "the origin of the mathematical capacity [lies in] an abstraction from linguistic operations". Many mathematicians and physicists, however, disagree and insist that mathematical reflection is primarily nonlinguistic—Albert Einstein, for instance, stated: "Words and language, whether written or spoken, do not seem to play any part in my thought processes." [1]

[2] An alternative to the language hypothesis has emerged from recent cognitive neuroscience research, according to which mathematics arose from an abstraction over evolutionarily ancient and nonlinguistic intuitions of space, time, and number. Indeed, even infants and uneducated adults with a drastically impoverished language for mathematics may possess abstract proto-mathematical intuitions of number, space, and time. Such "core knowledge" is predictive of later mathematical skills and may therefore serve as a foundation for the construction of abstract mathematical concepts. [3]

Linguistic symbols may play a role, possibly transiently, in the scaffolding process by which core systems are orchestrated and integrated. Furthermore, mathematics encompasses multiple domains, and it seems possible that only some of them may depend on language. [4] For instance, geometry and topology arguably call primarily upon visuospatial skills whereas algebra, with its nested structures akin to natural language syntax, might putatively build upon language skills.

21- The underlined word "transiently" in paragraph 3 is closest in meaning to ..... .

1) equivocally
2) tenaciously
3) fleetingly
4) sagaciously

22- **According to the passage, "core knowledge" intuitions of number, space, and time ……..**
1) indicate a drastically impoverished language
2) obstruct mathematical concept formation
3) only emerge in infants and uneducated adults
4) anticipate future mathematical capacities

23- **According to the passage, which of the following statements is true?**
1) Chomsky and Einstein respectively represent the core-knowledge and linguistic hypotheses about mathematical skills.
2) Only two hypotheses regarding the acquisition of mathematical capacities in human beings exist.
3) The manner of evolution of mathematical skills in primitive human beings has not yet been discovered.
4) Geometry and algebra are areas of mathematics which rely upon visuospatial skills rather than linguistic syntax.

24- **Which of the following statements can best be inferred from the passage?**
1) The linguistic and core-knowledge hypotheses are not necessarily mutually exclusive.
2) The origin and evolution of mathematical skills are the most significant concerns of modern mathematics.
3) Advanced mathematical skills are by no means confined to human beings.
4) Debates about the origin and evolution of mathematical skills are as old as the discipline itself.

25- **In which position marked by [1], [2], [3] and [4], can the following sentence best be inserted in the passage?**
Advanced mathematics would arise from core representations of number and space through the drawing of a series of systematic links, analogies, and inductive generalizations.
1) [1] 2) [2] 3) [3] 4) [4]

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۲۶- فرض کنید تابع f در دامنهٔ تعریف خود، اکیداً نزولی باشد و $f^۲(x) = ۶f(x) + x^۲ - ۴x - ۵$. مقدار $\lim_{x\to ۴} \frac{(x^۲ - ۳x - ۴)f(x)}{f(f(x)) - f(۱)}$ ، کدام است؟
۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) صفر

۲۷- تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده و در شرط $\lim_{h\to ۰} \big(f(۱+h) - f(۱-h)\big) = ۰$ صدق می‌کند. کدام مورد درست است؟
۱) اگر تابع f کران‌دار باشد، آنگاه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ موجود و متناهی است.
۲) اگر تابع f در هر همسایگی $x = ۱$ بی‌کران باشد، آنگاه مقدار $\lim_{x\to ۱} f(x)$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است.
۳) تابع f در $x = ۱$ پیوسته است.
۴) درخصوص وجود یا عدم وجود حد تابع f در $x = ۱$، نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۲۸- دنبالهٔ $x_n = \left(\frac{۲}{۱}\right)^{۱}\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۳}\ldots\left(\frac{n+۱}{n}\right)^{n}$، به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ مفروض است. مقدار $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ ، کدام است؟

۱) $\sqrt{e}$

۲) e

۳) $e\sqrt{e}$

۴) $e^{۲}$

۲۹- در مختصات قطبی (r, θ)، با فرض $r \neq ۰$، کدام مورد درست است؟ $\left(r_{xx} = \frac{\partial^{۲} r}{\partial x^{۲}}\right)$

۱) $r_{xx} = r\sin^{۲}\theta$

۲) $r_{xx} = r\cos^{۲}\theta$

۳) $rr_{xx} = \cos^{۲}\theta$

۴) $rr_{xx} = \sin^{۲}\theta$

۳۰- فرض کنید f روی $(۰, \infty)$ پیوسته باشد. کدام مورد درست است؟

۱) اگر $\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_{۰}^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا است.

۲) اگر $\int_{۰}^{\infty} xf(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_{۰}^{\infty} f(x)dx$ همگرا است.

۳) اگر $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+f^{۲}(x)}dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{۱+f^{۲}(x)}$ همگرا است.

۴) اگر $\int_{۰}^{\infty} f^{۲}(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_{۰}^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا است.

۳۱- اگر $\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{x^{۴}+۱} = \frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$، آنگاه مقدار $\int_{۰}^{\infty} \frac{x^{۲}+۱}{x^{۴}+۱}dx$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$

۳) $\sqrt{۲\pi}$

۴) ۲π

۳۲- مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم $x = ۳t^{۲}$ و $y = ۲t^{۳}$ حول محور yها، در بازهٔ $t \in [۰, ۱]$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۲\pi(\sqrt{۲}-۱)}{۵}$

۲) $\frac{۲۴\pi(\sqrt{۲}-۱)}{۵}$

۳) $\frac{۱۲\pi(\sqrt{۲}+۱)}{۵}$

۴) $\frac{۲۴\pi(\sqrt{۲}+۱)}{۵}$

۳۳- مساحت ناحیهٔ درون منحنی $2x^2 + xy + 2y^2 = 2$، کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{\sqrt{15}}$

۲) $\frac{4\pi}{3\sqrt{7}}$

۳) $\frac{2\pi}{3}$

۴) $\frac{\pi}{4}$

۳۴- تابع $f(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} \sqrt{\frac{t^\alpha}{x^2+y^2}}\,dxdy$، روی اعداد حقیقی نامنفی مفروض است. کدام مورد درخصوص حد راست تابع f در $t = 0$ درست است؟

۱) تابع f فقط به‌ازای $\alpha = 0$، دارای حد راست غیرصفر است.

۲) تابع f به‌ازای $\alpha \ge 0$، دارای حد راست غیرصفر است.

۳) تابع f فقط به‌ازای $\alpha = -2$، دارای حد راست غیرصفر است.

۴) تابع f به‌ازای $\alpha \le -2$، دارای حد راست غیرصفر است.

۳۵- مقدار $\int_C \frac{xdy + ydx}{\sqrt{4 - x^2y^2}}$، که در آن C پاره‌خط گذرا از نقطهٔ $(-1, 1)$ به $(1, 1)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{\pi}{2}$

۳) $\frac{2\pi}{3}$

۴) π

۳۶- فرض کنید سری توانی $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}$ یکی از جواب‌های معادله دیفرانسیل $Ax^2y'' - Bx(x+1)y' + y = 0$ به ازای $A \ne 0$ باشد. کدام مورد درست است؟

۱) $A - 2B = 2$

۲) $A + 2B = 2$

۳) $A - 2B = 4$

۴) $A + 2B = 4$

۳۷- اگر $Dy = y'$، آنگاه جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $D(D^2 + 2D + 2)y = 4e^{-x}\sin x$، کدام است؟

۱) $y = xe^{-x}(\cos x + \sin x)$

۲) $y = xe^{-x}(\cos x - \sin x)$

۳) $y = xe^{-x}(\sin x - \cos x)$

۴) $y = -xe^{-x}(\sin x + \cos x)$

۳۸- معادله دیفرانسیل $(Ax+1)^2y''+(9x-2B)y'+y=0$ دارای جواب $y=\sin(\frac{1}{3}\ln(Ax+1))$ است. مقادیر A و B، کدام‌اند؟

۱) $A=\pm 3$ و $B=\mp\frac{3}{2}$ به‌طوری‌که $AB<0$.

۲) $A=\pm\frac{3}{2}$ و $B=\mp 3$ به‌طوری‌که $AB<0$.

۳) $A=\pm 3$ و $B=\pm\frac{3}{2}$ به‌طوری‌که $AB>0$.

۴) $A=\pm\frac{3}{2}$ و $B=\pm 3$ به‌طوری‌که $AB>0$.

۳۹- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $2y(1+x^2)\frac{dy}{dx}+xy^2=(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ که از مبدأ مختصات می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y^2=\frac{x^3-3x}{3\sqrt{x^2+1}}$

۲) $y^2=\frac{x^3-2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

۳) $y^2=\frac{x^3+3x}{3\sqrt{x^2+1}}$

۴) $y^2=\frac{x^2+2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

۴۰- فرض کنید $y''+y'=\cos x+\int_0^x \sin(x-u)y'(u)du$ و $y(0)=y'(0)=0$. $y'(x)$، کدام است؟

۱) $e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)-1\right)$

۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

۳) $e^{\frac{1}{2}x}\left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)-1\right)$

۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

۴۱- با فرض آنکه p، q و r حروف گزاره‌ای باشند، کدام‌یک از گزینه‌ها معادل $(p\vee q)\Rightarrow r$ نیست؟ (نماد ¬، نمایش نقیض است.)

۱) $(r\vee\neg p)\wedge(r\vee\neg q)$

۲) $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

۳) $\neg(p\vee q)\vee r$

۴) $(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$

۴۲- نقیض گزاره زیر کدام است؟

«به ازای هر دو عدد اصلی α و β اگر $\alpha < \beta$ آنگاه یک عدد اصلی مانند γ یافت می‌شود که $\alpha < \gamma < \beta$.»

۱) $\exists \alpha \exists \beta (\alpha < \beta \wedge \exists \gamma (\beta \leq \gamma))$

۲) $\exists \alpha \exists \beta (\alpha < \beta \Rightarrow \forall \gamma (\gamma \leq \alpha \vee \beta \leq \gamma))$

۳) $\exists \alpha \exists \beta (\alpha < \beta \wedge \forall \gamma (\gamma \leq \alpha \vee \beta \leq \gamma))$

۴) $\forall \alpha \exists \beta (\alpha < \beta \wedge \forall \gamma (\gamma \leq \alpha \vee \beta \leq \gamma))$

۴۳- اگر A زیرمجموعه شمارا و B زیرمجموعه ناشمارایی از $\mathbb{R}$ باشند، کدام مجموعه قطعاً ناشماراست؟

۱) $A^c \cap B$

۲) $A \cap B$

۳) $A \cup B^c$

۴) $A \cap B^c$

۴۴- فرض کنید k عددی طبیعی و R رابطه‌ای بر مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ باشد که با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

به‌ازای $a,b \in \mathbb{Z}$، گوییم aRb اگر $b-a$ مضربی از k باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱) R رابطه هم‌ارزی است.

۲) R مجموعه $\mathbb{Z}$ را به K رده هم‌ارزی افراز می‌کند.

۳) رابطه R بازتابی و متقارن است ولی متعدی نیست.

۴) رده‌های هم‌ارزی رابطه هم‌ارزی R به صورت $[a] = a + k\mathbb{Z}$ هستند.

۴۵- فرض کنید $f : A \to B$ که A و B مجموعه‌های نامتناهی هستند و عدد اصلی (کاردینال) A بزرگتر از عدد اصلی B است. کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f نمی‌تواند دوسویی باشد.

۲) تابع f نمی‌تواند پوشا باشد.

۳) تابع f می‌تواند یک به یک باشد.

۴) تعداد توابع $f : A \to B$ برابر $|A|^{|B|}$ است، که $|\ |$ نماد عدد اصلی است.

۴۶- فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد، به‌طوری‌که برای هر ماتریس B با اثر صفر داشته باشیم $tr(BA) = 0$. در این‌صورت، A چگونه ماتریسی است؟

۱) قطری ۲) همانی ۳) بالا مثلثی ۴) پایین مثلثی

۴۷- کدام‌یک از گزاره‌های زیر، در مورد ماتریس‌های متشابه درست نیست؟

۱) اگر A متشابه با B باشد، آنگاه A^n متشابه با B^n است به‌ازای هر n متعلق به مجموعه اعداد طبیعی

۲) اگر A متشابه با B باشد، آنگاه $tr(A) = tr(B)$

۳) هر ماتریس با ترانهاده خودش متشابه است.

۴) AB با ماتریس BA متشابه است.

۴۸- فرض کنید $T : V \to W$ یک تبدیل خطی باشد. اگر $\dim T(V) = 1$، $\dim \ker T = 2$ و $\dim W = 4$. در این‌صورت، کدام مورد درست است؟

۱) هر پایه V، دوعضوی است.

۲) V، یک پایه سه‌عضوی دارد.

۳) V، یک فضای برداری ۴ بُعدی است.

۴) V، دو پایه دوعضوی و یک پایه سه‌عضوی دارد.

۴۹- فرض کنید ماتریس $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $\lambda_۲$ و $\lambda_۱$ مقادیر ویژه آن باشند. حاصل $\lambda_۱^۲+\lambda_۲^۲$، کدام است؟

۱) ۷۲

۲) ۶۴

۳) ۶۲

۴) ۳۴

۵۰- فرض کنید $P_n[x]$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر n با ضرایب حقیقی باشد و تبدیل خطی زیر را درنظر بگیرید:

$T:P_n[x]\to P_n[x]$ با ضابطه $T(f(x))=xf'(x)-f(x)$

در این صورت، کدام گزاره در مورد تبدیل T صادق است؟

۱) $P_n[x]=KerT\oplus ImT$

۲) T پوشاست.

۳) T یک‌به‌یک است.

۴) $KerT=\mathbb{R}$

۵۱- فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ در رابطه $\exists N\,\forall n\geq N\ |a_n-a_{n-۱}|\leq A_n$ صدق می‌کند. به‌ازای کدام مقدار A_n، دنباله $\{a_n\}$ ممکن است واگرا باشد؟

۱) $\frac{۱}{n}$

۲) $\frac{۱}{n^۲}$

۳) $\frac{n}{۲^n}$

۴) $\frac{۲n+۱}{n^۴-n}$

۵۲- اگر $A=\left\{\frac{m}{n}+۴\frac{n}{m}\middle|m,n\in\mathbb{N}\right\}$، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\inf A=۰$

۲) $\inf A=۴$

۳) $\inf A=۵$

۴) $\sup A=\infty$

۵۳- اگر $A=\left\{\frac{m}{۳^n}\middle|m,n\in\mathbb{N}\right\}$، آنگاه بستار این مجموعه در $\mathbb{R}$، کدام است؟

۱) A

۲) $A\cup\{۰\}$

۳) $[۰,\infty)$

۴) $\mathbb{Q}\cap[۰,\infty)$

۵۴- فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q} \\ -x & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}^c \end{cases}$ تعریف شود. کدام گزینه درست است؟ ($\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا است.)

۱) چون $\mathbb{Q}$ شمارا است پس f انتگرال‌پذیر ریمان است و $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{a^2-b^2}{2}$.

۲) تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است و $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}$.

۳) تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است و $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

۴) تابع f انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

۵۵- فرض کنید تابع $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ پیوسته و روی $(0,2)$ مشتق‌پذیر باشد و $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=-1$. کدام‌یک از اعداد زیر ممکن است در بُرد تابع f' نباشد؟

۱) $-\frac{4}{3}$

۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$

۴) صفر

۵۶- حجم کره‌ای به شعاع $\frac{7}{5}$ متر را با استفاده از ماشین‌حسابی که اعداد ماشینی را تا پنج رقم اعشاری با ممیز ثابت گرد می‌کند، محاسبه می‌کنیم. با فرض $\pi\cong 3/14159$، حداکثر خطای محاسباتی در تعیین حجم کره، کدام است؟

۱) ۰/۰۰۰۰۶

۲) ۰/۰۰۰۰۸

۳) ۰/۰۰۰۶

۴) ۰/۰۰۰۸

۵۷- مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۵۸- ماتریس A را به روش تجزیهٔ LU با محورگیری جزیی به‌صورت $P_1A = LP_2U$ چنان تجزیه می‌کنیم که P_1 و P_2 ماتریس‌های مقدماتی (جایگشتی)، L پایین مثلثی با عناصر قطری واحد و U بالا مثلثی باشند. با فرض $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، بردار ستون دوم ماتریس U کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۵۹- تابع جدولی $\{(n, ۲^n), n \in \mathbb{Z}, |n| \leq ۲\}$ مفروض است. مقدار تفاضل منقسم نیوتن مرتبه چهارم تابع جدولی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲۴}$

۳) $\frac{۱}{۴۸}$

۴) $\frac{۱}{۹۶}$

۶۰- فرض کنید $T(h)$ تقریب $I = \int_{۰}^{a} (۳x^۲ - ۲x + ۱)\,dx$ با استفاده از دستور ذوزنقه (مرکب) با طول گام h بوده و $\left|I - T(\frac{۱}{۴})\right| = \frac{۱}{۱۶}$. مقدار $I - T(\frac{۱}{۸})$، کدام است؟

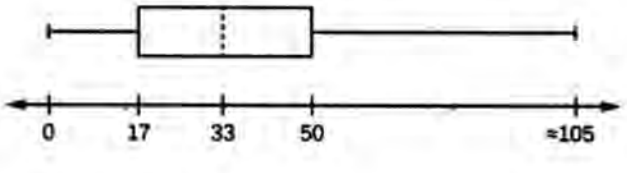
۱) $\frac{۱}{۶۴}$

۲) $\frac{۱}{۱۶}$

۳) $-\frac{۱}{۱۶}$

۴) $-\frac{۱}{۶۴}$

۶۱- نمودار جعبه‌ای زیر، جمعیت یک کشور را برای سال جاری نشان می‌دهد. اگر بدانیم ۱۲/۶ درصد جمعیت بالای ۶۵ سال سن دارند، تقریباً چند درصد از جمعیت بزرگسالان در سن کار (بالای ۱۷ تا ۶۵ سال) هستند؟



۱) ۵۹/۸

۲) ۶۲/۴

۳) ۷۰/۶

۴) ۷۳/۱

۶۲- برای دو پیشامد E و F اگر $P(E|F)=1$، آنگاه کدام مورد درست است؟

۱) $P(F|E^c)=0$

۲) $P(F^c|E^c)=0$

۳) $P(F^c|E^c)=P(F^c)$

۴) $P(F|E^c)=\frac{1}{2}$

۶۳- انحراف معیار مشاهدات یک نمونه دوتایی برابر $\sqrt{2}$ است. در مورد بُرد آنها چه می‌توان گفت؟

۱) برابر $\sqrt{2}$

۲) کمتر از $\sqrt{2}$

۳) برابر ۲

۴) کمتر از ۲

۶۴- فرض کنید احتمال افزایش شاخص سهام یک شرکت برای امروز ۰/۵۴، برای فردا نیز ۰/۵۴ و برای هر دو روز ۰/۲۸ باشد. احتمال افزایش شاخص سهام این شرکت در هیچ‌یک از روزها، کدام است؟

۱) ۰/۱۵

۲) ۰/۲۰

۳) ۰/۲۵

۴) ۰/۳۰

۶۵- فرض کنید $S=\{1,2,\cdots,N\}$، در این‌صورت نسبت تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی با تعداد زوج به تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی با تعداد فرد از S، کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{2^{N-1}}$

۲) ۱

۳) $\frac{1}{2^{N+1}}$

۴) $1-\frac{1}{2^N}$

آنالیز ریاضی:

۶۶- کدام گزینه یک متر روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌کند؟

۱) $d(x,y)=e^{|x-y|}$

۲) $d(x,y)=\ln(1+|x-y|)$

۳) $d(x,y)=\begin{cases}x-y & x\geq y\\ 2y-2x & x<y\end{cases}$

۴) $d(x,y)=\lfloor|x-y|\rfloor$ ($\lfloor.\rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۶۷- دنبالهٔ $\{n\}_{n=1}$ با کدام‌یک از مترهای زیر، روی $\mathbb{R}$ یک دنباله کوشی است؟

۱) $d(x,y)=|x-y|$

۲) $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$

۳) $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$

۴) $d(x,y)=1$ اگر $x\neq y$ و $d(x,y)=0$ اگر $x=y$.

۶۸- فرض کنید $\mathbb{Q}$ (مجموعهٔ اعداد گویا)، مجهز به متر اقلیدسی باشد و $E=\{x\in\mathbb{Q}:x^2<2\}$. کدام گزینه درخصوص مجموعهٔ E نسبت به فضای $\mathbb{Q}$ نادرست است؟

۱) مجموعهٔ E باز است.

۲) مجموعهٔ E بسته است.

۳) مرز E برابر است با $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

۴) هر نقطهٔ E یک نقطهٔ انباشتگی E است.

۶۹- اگر d مترگسسته روی $\mathbb{R}$ باشد، کدام گزینه درباره $[0,1]$ با این متر، نادرست است؟

۱) $[0,1]$ فشرده است.

۲) $[0,1]$ باز است.

۳) $[0,1]$ بسته است.

۴) $[0,1]$ ناهمبند است.

۷۰- فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کران‌دار از اعداد حقیقی است و $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n$ برای هر $\varepsilon>0$ قرار می‌دهیم.

$A_\varepsilon=\{n\in\mathbb{N}:a_n<\alpha-\varepsilon\}$

$B_\varepsilon=\{n\in\mathbb{N}:\alpha+\varepsilon<a_n\}$

کدام گزینه درست است؟

۱) برای هر $\varepsilon>0$، B_ε نامتناهی است.

۲) برای هر $\varepsilon>0$، A_ε نامتناهی است.

۳) برای هر $\varepsilon>0$، B_ε متناهی است.

۴) برای هر $\varepsilon>0$، A_ε متناهی است.

۷۱- فرض کنید E زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر E ناشمارا باشد آنگاه $\overline{E}=E'$

۲) اگر $\mathbb{R}\setminus E$ همبند باشد آنگاه E ناشماراست.

۳) اگر E' ناشمارا باشد آنگاه E ناشماراست.

۴) اگر $\mathbb{R}\setminus E$ در $\mathbb{R}$ چگال باشد آنگاه E شماراست.

۷۲- فرض کنید X فضای متریک و تابع $f:X\to X$ پیوسته باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر X فشرده باشد آنگاه $f(X)$ نیز فشرده است.

۲) اگر X فشرده باشد آنگاه f بر X یکنواخت پیوسته است.

۳) اگر f بر X یکنواخت پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ کران‌دار است.

۴) اگر X همبند باشد آنگاه $f(X)$ نیز همبند است.

۷۳- فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ تابعی پیوسته است، کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر برد f در $[0,1]$ چگال باشد آنگاه f پوشاست.

۲) اگر برد f زیرمجموعه اعداد گویا باشد آنگاه f تابع ثابت است.

۳) اگر برد f زیرمجموعه اعداد گنگ باشد آنگاه f تابع ثابت است.

۴) اگر برد f در $[0,1]$ بسته و نامتناهی باشد آنگاه f پوشاست.

۷۴- فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند که تابع دوسویی $f:X\to Y$ پیوسته است. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر Y فشرده باشد آنگاه f^{-1} پیوسته است.

۲) اگر X فشرده باشد آنگاه f^{-1} پیوسته است.

۳) اگر X کران‌دار باشد آنگاه Y کران‌دار است.

۴) اگر Y فشرده باشد آنگاه X فشرده است.

۷۵- کدام تابع بر $[0,+\infty]$ پیوسته یکنواخت نیست؟

۱) $f(x)=x(x-1)$

۲) $f(x)=\dfrac{\sin x}{3+\sin x}$

۳) $f(x)=\sqrt{x}$

۴) $f(x)=e^{-x^2}$

۷۶- اگر دنباله توابع حقیقی مقدار $\{f_n\}$ به تابع f بر $[0,1]$ همگرای یکنواخت باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر f_nها بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه f نیز بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر است.

۲) اگر f_nها بر $[0,1]$ پیوسته باشند، آنگاه f نیز بر $[0,1]$ پیوسته است.

۳) اگر f_nها بر $[0,1]$ انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه f نیز بر $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است.

۴) اگر f_nها بر $[0,1]$ صعودی باشند، آنگاه f نیز بر $[0,1]$ صعودی است.

۷۷- فرض کنید تابع $f:[0,1]$ با ضابطهٔ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}$ تعریف شود که $\alpha\in(2,\infty)$. کدام گزینه درست است؟

۱) f بر $[0,1]$ پیوسته نیست.

۲) f بر $[0,1]$ مشتق‌پذیر است.

۳) f بر $[0,1]$ پیوسته است ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

۴) f بر $[0,1]$ پیوسته است ولی در برخی از نقاط بازه مشتق‌پذیر نیست.

۷۸- برای هر عدد طبیعی n، تابع $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f_n(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ q\le n\\ 0 & \text{درغیراین‌صورت}\end{cases}$ تعریف می‌کنیم.

کدام گزینه درست است؟

۱) $\{f_n\}$ دنباله‌ای نزولی است.

۲) حد نقطه‌وار دنباله توابع $\{f_n\}$ وجود ندارد.

۳) دنباله $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌وار به یک تابع پیوسته است.

۴) دنباله $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌وار به یک تابع انتگرال‌ناپذیر است.

۷۹- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده و برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $f_n : X\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف ـ دنباله توابع $\{f_n\}$ بر X همگرای یکنواخت است.

ب ـ دنباله توابع $\{f_n\}$ بر X همپیوسته و همگرای نقطه‌وار است.

کدام مورد درست است؟

۱) «الف» و «ب» با هم معادل‌اند.

۲) «الف»، «ب» را نتیجه می‌دهد امّا عکس آن برقرار نیست.

۳) «ب»، «الف» را نتیجه می‌دهد امّا عکس آن برقرار نیست.

۴) هیچ‌کدام از «الف» یا «ب»، دیگری را نتیجه نمی‌دهد.

۸۰- دنبالهٔ $f_n : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f_n(x)=\frac{nx}{n^2+x}$ تعریف می‌شود که $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$. کدام گزینه برای دنبالهٔ نادرست است؟

۱) بر $\mathbb{R}^+$ همگرای یکنواخت است.

۲) در هر بازهٔ کران‌دار در $\mathbb{R}^+$ همگرای یکنواخت است.

۳) بر روی هیچ بازهٔ بی‌کرانی در $\mathbb{R}^+$ همگرای یکنواخت نیست.

۴) در هر نقطه‌ای از $\mathbb{R}^+$ همگرا به صفر است.

۸۱- سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ را بر بازه $[0,\infty)$ در نظر می‌گیریم. کدام گزینه درست است؟

۱) سری بر $[0,1)$ همگراست ولی بر $[1,\infty)$ واگراست.

۲) سری در هر نقطه‌ای از $[0,\infty)$ همگراست.

۳) سری در تمام نقاط $(0,\infty)$ واگراست.

۴) همگرایی سری بر $[0,1)$ یکنواخت است.

۸۲- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح ناصفر است که به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $n\le|a_{n+1}-a_n|\le 2n$. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ، کدام است؟

۱) برابر ۱ است.

۲) هر عددی در بازه $[1,e]$ می‌تواند باشد.

۳) هر عددی در بازه $\left[\frac{1}{e},1\right]$ می‌تواند باشد.

۴) هر عددی در بازه $[0,1]$ می‌تواند باشد.

۸۳- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم، $(x \in \mathbb{R})$.

الف) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty}(a_n + \cdots a_{2n}) = 0$

ب) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ همگرای یکنواخت است.

کدام گزینه درست است؟

۱) «الف» و «ب» هر دو درست هستند.

۲) «الف» و «ب» هیچ‌کدام درست نیستند.

۳) «الف» درست و «ب» نادرست است.

۴) «الف» نادرست و «ب» درست است.

۸۴- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر ریمان بر $[a,b]$ است که به تابع f همگرای نقطه‌ای است. از کدام گزینه نتیجه می‌شود که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان و $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ است؟

۱) برای هر n تابع f_n دارای مشتق پیوسته است و دنباله $\{f_n'\}$ بر $[a,b]$ همگرای یکنواخت است.

۲) برای هر n و هر $x \in [a,b]$، $|f_n(x)| \le 1$.

۳) برای هر n تابع f_n پیوسته است.

۴) برای هر n و هر $x \in [a,b]$، $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$.

۸۵- فرض کنید دنباله توابع حقیقی مقدار $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ بر مجموعه E همگرای یکنواخت باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) دنباله $\{f_n - g_n\}$ بر E، همگرای یکنواخت است.

۲) دنباله $\{f_n . g_n\}$ بر E، همگرای یکنواخت است.

۳) دنباله $\{f_n\}$ بر E، یکنواخت کران‌داراست.

۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بر E، همگرای یکنواخت است.

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات:

۸۶- مرتبه عنصر $(10, 8, 5)$ در گروه $G = \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{70}$، چند است؟

۱) ۱۴

۲) ۴۰

۳) ۱۲۶

۴) ۴۰۰

۸۷- گروه عناصر وارون‌پذیر حلقه $\mathbb{Z}_8$ با کدام گروه یکریخت است؟

۱) گروه دوری از مرتبهٔ ۲

۲) گروه دوری از مرتبهٔ ۴

۳) گروه دوری از مرتبهٔ ۷

۴) گروه چهارتایی کلاین

۸۸- فرض کنید G گروه دوری از مرتبهٔ ۴۸ باشد و نگاشت $\varphi : G \to G$ با ضابطهٔ $\varphi(g) = g^{۳}$ را در نظر بگیرید. در این صورت کدام مورد درست است؟

۱) $|\ker \varphi| = ۳$

۲) $|\mathrm{Im} f| = ۳|\ker f|$

۳) $|\ker \varphi| = ۱۶$

۴) $|\mathrm{Im} f| = ۴۸$

۸۹- گروه خودریختی‌های $\mathbb{Z}_{۱۵}$ دارای چند عضو است؟

۱) ۲

۲) ۸

۳) ۱۵

۴) ۲۲۵

۹۰- فرض کنید R و S دو حلقه یکدار و $f : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای ناصفر باشد. کدام مورد نادرست است؟

۱) اگر S یک میدان باشد، آنگاه f پوشا است.

۲) اگر R یک میدان باشد، آنگاه f یک به یک است.

۳) اگر S جابه‌جایی و f یک به یک باشد، آنگاه R جابه‌جایی است.

۴) اگر R جابه‌جایی و f پوشا باشد، آنگاه S جابه‌جایی است.

۹۱- برای یک جایگشت $\sigma \in S_n$ از مرتبهٔ زوج، کدام مورد درست است؟

۱) $\frac{o(\sigma)}{o(\sigma^{۲})}$ زوج است.

۲) σ یک جایگشت زوج است.

۳) σ به حاصل‌ضرب ترانهش‌های مجزا قابل تجزیه است.

۴) در تجزیه σ به حاصل‌ضرب دورهای مجزا، فقط دورهای از طول زوج ظاهر می‌شوند.

۹۲- در گروه خارج قسمتی $G = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ (که صورت و مخرج با جمع متعارف در نظرگرفته شده‌اند) کدام گزاره، نادرست است؟

۱) G دارای یک دنبالهٔ نامتناهی اکیداً صعودی از زیرگروه‌ها به‌شکل $G_۱ \subseteq G_۲ \subseteq \cdots$ است.

۲) G دارای زیرگروه سرهٔ نامتناهی است.

۳) G در $(\mathbb{C} - \{۰\}, \times)$ می‌نشیند.

۴) G در $(\mathbb{C}, +)$ می‌نشیند.

۹۳- در حلقهٔ $\mathbb{Z}[x]$ در مورد ایده‌آل‌های $I = \langle ۲ \rangle$ و $J = \langle x \rangle$ کدام گذاره درست است؟

۱) I ماکسیمال و J اول است.

۲) I اول و J ماکسیمال است.

۳) I و J هر دو ماکسیمال هستند.

۴) I و J هر دو اول و غیرماکسیمال هستند.

۹۴- فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و I ایده‌آلی از آن باشد به‌طوری‌که هر عضو I پوچ‌توان است. اگر $U(R)$ مجموعه اعضای وارون‌پذیر R باشد، آنگاه مجموعه $I+U(R)$ برابر است با:

۱) R

۲) I

۳) $U(R)$

۴) بسته به حلقه R، هر یک از گزینه‌ها می‌تواند صحیح باشد.

۹۵- فرض کنید G یک گروه و $H<G$ و $H\neq 1$، دراین‌صورت:

۱) اگر H نامتناهی باشد آنگاه $G-H$ متناهی است.

۲) اگر $G-H$ متناهی باشد آنگاه G نیز متناهی است.

۳) اگر $G-H$ متناهی باشد آنگاه G نامتناهی است.

۴) اگر H متناهی باشد آنگاه $G-H$ متناهی است.

۹۶- به چند طریق می‌توان ۳ توپ مشابه سفید، ۲ توپ مشابه سیاه و ۲ توپ مشابه آبی را در یک ردیف چید، به‌طوری که ۲ توپ آبی، مجاور نباشند؟

۱) ۳۶۰

۲) ۲۱۰

۳) ۲۰۴

۴) ۱۵۰

۹۷- مجموعه اعداد ۸ رقمی که فقط از ارقام ۱، ۲ و ۳ تشکیل شده‌اند را A می‌نامیم. تعداد ارقام ۳ به‌کاررفته در اعضای A، کدام است؟

۱) ۸×۳^{۷}

۲) ۸×۳^{۸}

۳) $۳^{۸}-۲^{۸}$

۴) $۸^{۳}$

۹۸- به چند طریق می‌توان ۲ خانه از ۲۵ خانه یک جدول ۵×۵ انتخاب کرد، به‌طوری‌که در یک سطر یا در یک ستون، نباشند؟

۱) ۱۰۰

۲) ۲۰۰

۳) ۳۰۰

۴) ۴۰۰

۹۹- چند تابع یک به یک مانند f از $\{۱,۲,\cdots,۱۱\}$ به $\{۱,۲,\cdots,۲۵\}$ وجود دارد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $k\in\{۱,۲,\cdots,۱۱\}$، عدد $k+f(k)$، فرد باشد؟

۱) $\frac{۱۳!\times ۱۲!}{(۷!)^{۳}\times ۶!\times ۵!}$

۲) $\frac{۱۳!\times ۱۲!}{(۷!)^{۲}}$

۳) $\frac{۱۳!\times ۱۲!}{(۸!)^{۲}\times (۶!)^{۲}\times ۵!}$

۴) $\frac{۱۳!\times ۱۲!}{۸!\times ۶!}$

۱۰۰- تابع مولد دنباله زیر کدام است؟

$$a_n = \begin{cases} ۲: & n \geq ۰ \text{ و زوج} \\ ۳: & n \geq ۰ \text{ و فرد} \end{cases}$$

۱) $\frac{۲+۳x}{۱-x}$

۲) $\frac{۳+۲x}{۱-x}$

۳) $\frac{۲+۳x}{۱-x^۲}$

۴) $\frac{۳+۲x}{۱-x^۲}$

۱۰۱- ۳۰ مهره سفید دوبه‌دو غیرمشابه و ۳ مهره سیاه مشابه داریم. به چند طریق می‌توان این ۳۳ مهره را دور یک دایره چید به‌طوری که میان هر دو مهره سیاه، ۱۰ مهره سفید به‌طور متوالی، قرار بگیرند؟

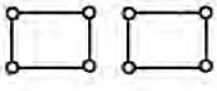
۱) $\frac{۳۰!}{۱۰}$

۲) $\frac{۳۰!}{۳}$

۳) $۳ \times ۲۹!$

۴) $\frac{۲۹!}{۱۰}$

۱۰۲- گراف کامل ۸ رأسی، چند زیرگراف یکریخت (همسان) با گراف زیر دارد؟



۱) ۳۱۵

۲) ۶۳۰

۳) ۱۲۶۰

۴) ۲۵۲۰

۱۰۳- G یک گراف ۴ ـ منتظم (درجه هر رأس ۴) با ۱۲ رأس است. G چند مسیر با ۳ رأس دارد؟

۱) به ساختار G بستگی دارد.

۲) ۴۸

۳) ۷۲

۴) ۱۴۴

۱۰۴- به چند طریق می‌توان ۱۶ پله را با قدم‌های یک و دو پله‌ای طی کرد، به‌طوری‌که پله هشتم با قدم یک پله‌ای، طی شود؟

۱) ۷۱۴

۲) ۹۸۷

۳) ۱۱۵۶

۴) ۱۵۹۶

۱۰۵- فرض کنید: $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ و تعداد حالات پیمودن n پله با قدم‌های ۲پله‌ای و ۳پله‌ای $= a_n$.
کدام مورد درست است؟

۱) $a_۱$ تعریف نشده و $a_۰ = ۰$

۲) $a_۱ = ۰$ و $a_۰ = ۰$

۳) $a_۱ = ۰$ و $a_۰ = ۱$

۴) $a_۱$ تعریف نشده و $a_۰ = ۱$

جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۰۶- فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد. کدام مورد نادرست است؟

۱) مقادیر ویژه یک ماتریس مثبت معین، نامنفی هستند.

۲) $A^T A$ یک ماتریس نیمه‌مثبت معین است.

۳) اگر A یک ماتریس مثبت معین باشد، آنگاه $tr(A) > \min\{A_{ii}, i = ۱, ۲, ..., n\}$ است.

۴) اگر A یک ماتریس مثبت معین باشد، آنگاه زاویهٔ بین بردارهای x و Ax کوچک‌تر از $\frac{\pi}{۲}$ است.

۱۰۷- فرض کنید $A = (a_{ij})$، یک ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر با معکوس $C = (c_{ij})$ باشد. در حل دستگاه $Ax = b$، کدام مورد درست است؟

۱) بروز اختلال به اندازهٔ δ در a_{jk}، باعث ایجاد اختلال تقریباً به اندازهٔ $-c_{ij}x_j\delta$ در x_i می‌شود.

۲) بروز اختلال به اندازهٔ δ در a_{jk}، باعث ایجاد اختلال تقریباً به اندازهٔ $-c_{jk}x_k\delta$ در x_i می‌شود.

۳) بروز اختلال به اندازهٔ δ در b_j، باعث ایجاد اختلال $(\sum_{i=۱}^{n} c_{ij})\delta$ در x_i می‌شود.

۴) بروز اختلال به اندازهٔ δ در b_j، باعث ایجاد اختلال $c_{ij}\delta$ در x_i می‌شود.

۱۰۸- مسئلهٔ کمترین مربعات خطی $\|Ax - b\|_۲$ که در آن، A یک ماتریس $m \times n$ با $(m > n)$ است را درنظر بگیرید. با استفاده از تجزیهٔ QR ماتریس A به‌صورت $Q^T A = R = \begin{pmatrix} R_۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و $Q^T b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. کدام مورد برای جواب مسئله درست است؟

۱) اگر $R_۱ x = c$، آنگاه $\|Ax - b\|_۲ = \|d\|_۲$ کمترین است.

۲) اگر $R_۱ x = c$، آنگاه $\|Ax - b\|_۲ = ۰$.

۳) اگر $R_۱ x = c$، آنگاه $d \neq ۰$ و $\|Ax - b\|_۲$ کمترین است.

۴) اگر $d \neq ۰$ و $Q^T Ax = b$، آنگاه $\|Ax - b\|_۲$ کمترین است.

۱۰۹- تجزیهٔ LU کدام ماتریس وجود ندارد؟

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

۱۱۰- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 8 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 1 \end{bmatrix}$. برای حل دستگاه معادلات $Ax = b$ از روش تکرار گاوس ـ سایدل با بردار آغازین $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و حاصل‌ضرب ماتریس‌های جایگشت چنان عمل می‌کنیم که الگوریتم حل برای حل دستگاه $EAx = Eb$ همگرا باشد. بردار $x^{(1)}$ کدام است؟ (E حاصل‌ضرب ماتریس‌های جایگشت است.)

۱) $\begin{pmatrix} 2 \\ -0/8 \\ 0/125 \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 0/05 \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -42 \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$

۱۱۱- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix}$. یک ماتریس متعامد باشد، به‌طوری‌که درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس QA صفر باشد. مقدار $a^2 + c^2 + e^2$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۱۱۲- فرض کنید $Q_{۳\times ۳}$ ماتریس متعامد هاوس هولدری باشد، که $Q\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۲ \\ -۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ ۰ & * & * \\ ۰ & * & * \end{bmatrix}$. سطر اول ماتریس Q کدام است؟

۱) $(۰ \quad -۰/۳۶ \quad ۰/۶۴)$

۲) $(۰ \quad ۰/۶۴ \quad ۰/۳۶)$

۳) $(۰/۸ \quad ۰ \quad ۰/۶)$

۴) $(۰ \quad -۰/۶ \quad ۰/۸)$

۱۱۳- برای مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر، کدام مورد درست است؟ ($\alpha \in \mathbb{R}$ یک عدد مثبت است.)

$$\text{Min} \quad -\sum_{j=۱}^{n} x_j$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \le ۰$$
$$\sum_{j=۱}^{n} x_j \le \alpha$$
$$x \ge ۰$$

۱) مسئله بی‌کران است.

۲) مقدار بهینهٔ مسئله، $-\alpha$ است.

۳) مقدار بهینهٔ مسئله، در بازه $(-\alpha , ۰)$ قرار دارد.

۴) مقدار بهینهٔ مسئله، صفر یا $-\alpha$ است.

۱۱۴- فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و چندوجهی $P = \{ x \in \mathbb{R}^n ; Ax \le b \}$ ناتهی باشد. در این‌صورت، P دارای نقطهٔ رأسی است اگر و تنها اگر .....

۱) $m \ge n$

۲) $\text{rank}(A) = n$

۳) $m \le n$

۴) $\text{rank}(A) = m$

۱۱۵- کدام مورد درست است؟

۱) اگر اشتراک تعداد متناهی نیم‌فضا ناتهی شود، آنگاه اشتراک آنها لزوماً نقطهٔ رأسی ندارد.

۲) اگر یک چندوجهی در $\mathbb{R}^n$ $(n \ge ۳)$ نقطهٔ رأسی تباهیده داشته باشد، آنگاه قید زائد هندسی دارد.

۳) اگر یک چندوجهی در $\mathbb{R}^۲$ نقطهٔ رأسی تباهیده داشته باشد، آنگاه قید زائد هندسی دارد.

۴) اگر یک چندوجهی در $\mathbb{R}^n$ قید زائد هندسی داشته باشد، آنگاه نقطهٔ رأسی تباهیده دارد.

۱۱۶- برای مقدار بهینهٔ سه مسئله زیر، کدام مورد درست است؟ ($e \in \mathbb{R}^{۱\times n}$ بردار سطری است که همهٔ مؤلفه‌های آن یک است.)

$$z_۱ = \text{Min}\, cx \quad \text{s.t.} \quad Ax \le b,\ ex \le ۱,\ x \ge ۰$$

$$z_۲ = \text{Min}\, cx \quad \text{s.t.} \quad Ax \le b,\ ex \ge ۱,\ x \ge ۰$$

$$z_۳ = \text{Min}\, cx \quad \text{s.t.} \quad Ax \le b,\ ex = ۱,\ x \ge ۰$$

۱) $z_۳ = \min\{z_۱ , z_۲\}$

۲) $z_۲ = \min\{z_۱ , z_۳\}$

۳) $z_۳ = \max\{z_۱ , z_۲\}$

۴) $z_۲ = \max\{z_۱ , z_۳\}$

۱۱۷- شرط لازم و کافی برای آن‌که نقطهٔ $\bar{x}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ برای مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر بهینه باشد، کدام است؟

$$\begin{aligned}&\text{Max } c_1x_1+c_2x_2\\&\text{s.t } \quad |-x_1+x_2|\le 2\\&\qquad x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

۱) (c_1,c_2) یک ضریب نامنفی از $(1,-1)$ باشد.

۲) (c_1,c_2) یک ضریب نامنفی از $(-1,1)$ باشد.

۳) (c_1,c_2) یک ترکیب خطی نامنفی از بردارهای $(-1,1)$ و $(0,1)$ باشد.

۴) (c_1,c_2) یک ترکیب خطی نامنفی از بردارهای $(1,-1)$ و $(1,0)$ باشد.

۱۱۸- در روش دوفازی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر، اگر در جدول پایانی فاز I، ستون مربوط به متغیر x_2 را با $y_2=B^{-1}a_2$ و بردار سمت راست را با $\bar{b}=B^{-1}b$ نمایش دهیم، آنگاه کدام مورد درست است؟

$$\begin{aligned}&\text{Min } \quad x_1-3x_2\\&\text{s.t.} \quad 3x_1+4x_2\le 12\\&\qquad x_1-x_2\ge 2\\&\qquad x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

۱) $\bar{b}=\begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix}$ و $y_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

۲) $\bar{b}=\begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix}$ و $y_2=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$

۳) $\bar{b}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ و $y_2=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$

۴) $\bar{b}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ و $y_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

۱۱۹- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر، مفروض است که در آن، A یک ماتریس $n\times n$ مربعی متقارن است. کدام مورد درست است؟

$$\begin{aligned}&\text{Min } cx\\&\text{s.t. } Ax=c\\&\qquad x\ge 0\end{aligned}$$

۱) ناحیهٔ شدنی، تک‌نقطه است.

۲) درصورت وجود نقاط شدنی، هر نقطه شدنی بهینه است.

۳) مسئله، جواب بهینهٔ دگرین دارد.

۴) مسئله، بی‌کران است.

۱۲۰- کدام مورد، نادرست است؟

۱) تبدیل مسئله اولیه ماکزیمم‌سازی به مینیمم‌سازی، علامت متغیرهای دوگان مکمل را تغییر نمی‌دهد.

۲) کنار گذاشتن یک محدودیت زائد هندسی، با صفر قرار دادن متغیر دوگان مکمل، معادل است.

۳) یک متغیر از مجموعهٔ بهینهٔ اولیه، نامتناهی است اگر و فقط اگر، متغیر دوگان مکمل آن، در تمام جواب‌های شدنی دوگان، صفر باشد.

۴) یک متغیر، در تمام جواب‌های اولیه صفر است اگر و تنها اگر متغیر دوگان مکمل آن، در یک جواب بهینه دوگان، مثبت باشد.

۱۲۱- کدام مورد برای جواب‌های معادله دیفرانسیل $x \in \mathbb{R}$ و $y' = \max\{1, y\}$، با شرط اولیه $y(0) = 1$، درست است؟

۱) معادله دیفرانسیل فاقد جواب است.

۲) معادله دیفرانسیل دارای جواب منحصربه‌فرد $y(x) = e^x$ است.

۳) معادله دیفرانسیل دارای جواب منحصربه‌فرد است.

۴) معادله دیفرانسیل بی‌شمار جواب دارد.

۱۲۲- فرض کنید $y(x)$ یک جواب غیرصفر معادله دیفرانسیل $y'' - e^x y = 0$ باشد. درخصوص تابع y کدام مورد درست است؟

۱) حداکثر یک ریشه حقیقی دارد.

۲) دقیقاً دو ریشه حقیقی دارد.

۳) حداقل دو ریشه حقیقی دارد.

۴) بی‌شمار ریشه حقیقی دارد.

۱۲۳- فرض کنید $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. کدام مورد درست است؟

۱) مبدأ مختصات یک نقطه زینی برای دستگاه معادلات $x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t)$ است.

۲) مبدأ مختصات یک نقطه گره برای دستگاه معادلات $x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t)$ است.

۳) مبدأ مختصات یک نقطه گره برای دستگاه معادلات $x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t)$ است.

۴) مبدأ مختصات یک نقطه زینی برای دستگاه معادلات $x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t)$ است.

۱۲۴- دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} x' = x(1-2y) \\ y' = y(-3+2x) \end{cases}, \; x > 0, y > 0$ مفروض است. کدام مورد درست است؟

۱) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ یک نقطه ناپایدار دستگاه است.

۲) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ یک نقطه پایدار دستگاه است، لیکن به‌طور مجانبی پایدار نیست.

۳) $(0, 0)$ یک نقطه به‌طور مجانبی پایدار دستگاه است.

۴) $(0, 0)$ یک نقطه پایدار دستگاه است، لیکن به‌طور مجانبی پایدار نیست.

۱۲۵- تابع هامیلتونی متناظر با دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} x' = x(1-2y) \\ y' = y(-3+2x) \end{cases}, \; x > 0, y > 0$، کدام است؟

۱) $-x - 3y + 2\ln x + 2\ln y$

۲) $2x - 3y - 2\ln x + \ln y$

۳) $2x + 2y - 3\ln x - \ln y$

۴) $3x + y - 2\ln x - 2\ln y$

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی ۱:

۱۲۶- یک چوب به طول L در اختیار داریم و آن را در نقطه‌ای که به‌طور تصادفی و یکنواخت انتخاب شده است، می‌شکنیم و قطعه‌ای را که انتهای سمت چپ چوب است نگه می‌داریم. سپس همین کار را با چوبی که نگه می‌داریم تکرار می‌کنیم. مقدار مورد انتظار چوبی که باقی می‌ماند کدام است؟

۱) $\frac{L}{۲}$

۲) $\frac{L}{۴}$

۳) $\frac{۳L}{۴}$

۴) $\frac{L}{۶}$

۱۲۷- فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(۰, \sigma^۲)$ و $T^۲ = \frac{۱}{n}\sum X_i^۲$ باشد، به‌طور تقریبی $P(T > \sigma)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sigma}{۴}$

۴) $\frac{\sigma}{۲}$

۱۲۸- اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی با $E(X) = a$ باشد، در مورد $E(\sqrt{X})$ چه می‌توان گفت؟

۱) $E(\sqrt{X}) \le \sqrt{a}$

۲) $E(\sqrt{X}) \ge \sqrt{a}$

۳) $E(\sqrt{X}) \le a$

۴) $E(\sqrt{X}) \ge a$

۱۲۹- فرض کنید (X, Y) دارای چگالی توأم $f(x,y) = e^{-۲x-\frac{y}{۲}}$, $x, y > ۰$ باشند. مقدار $E(X-Y)^۲$، چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$

۲) $\frac{۹}{۲}$

۳) $\frac{۱۱}{۲}$

۴) $\frac{۱۳}{۲}$

۱۳۰- اگر X_1، X_2، X_3 یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد و $T = X_1X_2X_3$، مقدار $Var(|T|)$، کدام است؟

x	−۱	۰	۱
f(x)	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

۱) $\frac{۵}{۶۴}$

۲) $\frac{۶}{۶۴}$

۳) $\frac{۷}{۶۴}$

۴) $\frac{۸}{۶۴}$

۱۳۱- فرض کنید متغیر تصادفی X مقادیر $1, 2, 3, ..., n$ را با احتمال‌های برابر اختیار می‌کند. اگر میانگین و واریانس X باهم برابر باشند، مقدار n، کدام است؟

۱) ۱۴

۲) ۱۲

۳) ۷

۴) ۶

۱۳۲- یک مدرسه موسیقی یک پیانو را به قیمت ۳۰۰۰ دلار، یک گیتار را به قیمت ۵۵۰ دلار و یک ویلن را به قیمت ۶۰۰ دلار خریداری کرده است. اگر میانگین قیمت یک پیانو ۴۰۰۰ دلار با انحراف معیار ۲۵۰۰، میانگین قیمت یک گیتار ۵۰۰ دلار با انحراف معیار ۲۰۰ و میانگین قیمت ویلن ۷۰۰ دلار با انحراف معیار ۱۰۰ باشد، به‌ترتیب از راست به چپ کدام ابزار را ارزان و کدام را گران خریده است؟

۱) ویلن ـ گیتار

۲) گیتار ـ پیانو

۳) گیتار ـ ویلن

۴) پیانو ـ ویلن

۱۳۳- شش وجه یک تاس شامل اعداد ۲، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ هستند. تاس را چهار مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه یک مرتبه وجه ۲، یک مرتبه وجه ۳ و دو مرتبه وجه ۴ مشاهده شود، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۴}$

۲) $\frac{۱}{۴۴}$

۳) $\frac{۱}{۵۴}$

۴) $\frac{۱}{۶۴}$

۱۳۴- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع مولد گشتاور $M(t)=\frac{۱۴+e^{-t}+e^{t}}{۱۶}$ باشد. مقدار $P(X\geq ۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۱۶}$

۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۴) $\frac{۱۲}{۱۶}$

۱۳۵- از توزیع $N(۰,۱)$، تعداد ۵ مشاهده به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که حداقل دو تا از این مشاهده‌ها مثبت باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱۸}{۳۲}$

۲) $\frac{۲۶}{۳۲}$

۳) $\frac{۳۰}{۳۲}$

۴) $\frac{۲۲}{۳۲}$

۱۳۶- فرض کنید $x>۰$, $F_X(x)=۱-e^{-x^{۲}}$ و $Y=[X]$ (جزء صحیح X)، در این صورت $P(Y>۲)$، کدام است؟

۱) $e^{-۲۵}$

۲) $e^{-۱۶}$

۳) $e^{-۹}$

۴) $e^{-۴}$

۱۳۷- اگر $X_۱,X_۲,...,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^{۲})$ و $T=\frac{۱}{۲۵}\sum_{i=۱}^{۲۵} I(X_i\geq \mu)$، مقدار تقریبی $P(T>۰/۶۹۶)$، کدام است؟

۱) ۰/۰۱

۲) ۰/۰۵

۳) ۰/۰۲۵

۴) ۰/۱

۱۳۸- برای متغیر تصادفی گسسته X که اعداد صحیح نامنفی را اختیار می‌کند، رابطهٔ $\frac{P(X=x)}{P(X=x+1)}=\frac{1}{a}$ برقرار است. واریانس X، کدام است؟

۱) $a(1-a)^2$

۲) $a(1-a)$

۳) $\frac{1-a}{a}$

۴) $\frac{a}{(1-a)^2}$

۱۳۹- اگر X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی دوتایی از توزیعی با میانگین صفر و واریانس ۲ باشند، در این صورت در مورد $R=\max(X_1,X_2)-\min(X_1,X_2)$، چه می‌توان گفت؟

۱) $E(R)\le 2$

۲) $E(R)\ge 2$

۳) $E(R)\le \sqrt{2}$

۴) $E(R)\ge \sqrt{2}$

۱۴۰- تعداد خرابی‌های یک خودپرداز در هر روز از فرایند پواسون با نرخ $\lambda=1$ پیروی می‌کند. احتمال این‌که خودپرداز در طی یک هفته فقط یک روز خراب باشد. کدام است؟

۱) $7e^{-6}(1-e^{-1})$

۲) $5e^{-1}(1-e^{-1})^4$

۳) $7e^{-1}(1-e^{-1})^6$

۴) $5e^{-5}(1-e^{-1})$

۱۴۱- در یک فرایند مارکوف همگن با فضای وضعیت $S=\{2,5\}$ و ماتریس احتمال انتقال $P=\begin{bmatrix}0/3 & 0/7\\ 0/6 & 0/4\end{bmatrix}$، فرض کنید $P(X_0=2)=0/4$ در این‌صورت مقدار $E(X_2)$ کدام است؟

۱) ۳/۱۲

۲) ۳/۶۳

۳) ۳/۸۵

۴) ۴/۱۱

۱۴۲- فرایند گام‌برداری تصادفی (قدم زدن تصادفی) $\{X_n : n \geq 1\}$ با $X_0 = 0$ را در نظر بگیرید که در آن $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ و $\{Y_n : n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع احتمال توأم $P(Y_1 = -2) = \frac{1}{4}$ و $P(Y_1 = 3) = \frac{3}{4}$ است. مقدار $P(\frac{X_{n+5} + 2}{X_{n+2} + 6} > 1)$ برابر است با:

۱) $(\frac{1}{4})^2$

۲) $(\frac{3}{4})^2$

۳) $(\frac{1}{4})^3$

۴) $(\frac{3}{4})^3$

۱۴۳- یک فرایند مارکوف همگن با فضای وضعیت $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر را درنظر بگیرید.

$$P = \begin{bmatrix} 0/2 & 0 & 0/8 & 0 & 0 \\ 0/1 & 0/3 & 0 & 0/2 & 0/4 \\ 0/3 & 0 & 0/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/6 & 0/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0/5 & 0/5 \end{bmatrix}$$

کدام وضعیت‌ها، هم جاذب و هم بازگشتی هستند؟

۱) وضعیت $\{2\}$

۲) وضعیت $\{2, 4\}$

۳) وضعیت $\{1, 3\}$

۴) وضعیت $\{2, 3\}$

۱۴۴- فرض کنید $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ اندازه یک جمعیت در زمان n باشد که در آن Y_i ها متغیرهای تصادفی مستقل پواسون با میانگین ۱/۵ هستند. مقدار $P(X_{n+1} = 5 | X_{n-2} = 3)$، کدام است؟

۱) $\frac{e^{-1/5}(1/5)^5}{5!}$

۲) $\frac{e^{-4/5}(4/5)^5}{5!}$

۳) $\frac{e^{-4/5}(4/5)^2}{2!}$

۴) $\frac{e^{-1/5}(1/5)^2}{2!}$

۱۴۵- اگر N تعداد ادعاهای خسارت از یک شرکت بیمه در یک ماه دارای توزیع پواسون با نرخ ۵ ادعا در ماه و X_i مبلغ خسارت i امین ادعا دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۰۰ و انحراف‌معیار ۱۰۰ واحد پولی باشد. در این صورت امید ریاضی کل خسارت پرداختی این شرکت در یک سال کدام است؟

۱) ۱۵/۰۰۰

۲) ۲۰/۰۰۰

۳) ۲۵/۰۰۰

۴) ۳۰/۰۰۰