کد کنترل

533

E

533E

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ــ سال ۱۴۰۱

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

صبح پنجشنبه
۱۴۰۱/۰۲/۲۹

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

ریاضی (کد ۱۲۰۸)

تعداد سؤال: ۱۵۰ — زمان پاسخ‌گویی: ۲۵۵ دقیقه

جدول مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱و۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۰	۳۱	۷۰
۳	آنالیز ریاضی	۲۰	۷۱	۹۰
۴	مبانی جبر و مبانی ترکیبیات	۲۰	۹۱	۱۱۰
۵	جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۲۰	۱۱۱	۱۳۰
۶	احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی۱	۲۰	۱۳۱	۱۵۰

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤال‌ها به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای همه اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفان برابر مقررات رفتار می‌شود.

* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزلهٔ غیبت و حضور نداشتن در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب ..... با شمارهٔ داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شمارهٔ صندلی خود را با شمارهٔ داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچهٔ سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچهٔ سؤال‌ها و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

***Directions:** Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.*

1- **The rising death toll is ---------- largely to the growing number of elderly people, who are especially vulnerable to the flu.**
1) attributed 2) converted 3) debilitated 4) transferred

2- **The couple were finally ---------- by the landlord after not paying their rent for six months.**
1) extended 2) elicited 3) evicted 4) evacuated

3- **We have a ---------- clientele in our language program, with students from Asia, Europe and South America.**
1) complex 2) diverse 3) symmetrical 4) haphazard

4- **But the possibility of these adversaries acting like friends, despite their long-standing ---------- and mutual dislike, is on the horizon.**
1) rivalry 2) advocacy 3) inclination 4) justification

5- **Debating that aliens exist cannot be deemed an ---------- truth as we have yet to see proof of their existence.**
1) unintelligible 2) insensitive 3) unforeseeable 4) incontrovertible

6- **The girls wanted to set the table, but they were more of a ---------- than a help.**
1) compliment 2) hindrance 3) thrill 4) pretension

7- **The government is to consult the attorney general on whether the enacting of such a law would be in ---------- of the constitution.**
1) provenance 2) rationalization 3) breach 4) caprice

8- **Someone once joked that man blames most accidents on ----------, but feels a more personal responsibility when he makes a hole-in-one on the golf course.**
1) legality 2) verdict 3) charge 4) fate

9- **The trial collapsed when it became clear that the main witness for the prosecution was not ----------.**
1) credible 2) singular 3) subjective 4) conjectural

10- **The rising number of minority inmates in prison only goes to ---------- the stereotype that members of minority groups are bad people.**
1) overlook 2) downplay 3) belie 4) perpetuate

PART B: Cloze Passage

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Fuel cell electric vehicles emit only water vapor and warm air, (11) ---------- no tailpipe emissions. Similar to electricity, hydrogen is an energy carrier that can be produced from various feedstocks. These feedstocks and production methods should be considered when (12) ----------.

Argonne National Laboratory's (ANL) report, *Fuel Choices for Fuel Cell Vehicles: Well-to-Wheels Energy and Emission Impacts*, analyzed greenhouse gas (GHG) (13) ---------- 10 of the most common hydrogen production and distribution pathways. ANL found that gaseous hydrogen produces (14) ---------- GHGs than liquid hydrogen in most cases. ANL also investigated hydrogen's effects on petroleum use and found that using hydrogen as a fuel (15) ---------- petroleum use by nearly %100 regardless of fuel production pathway.

11- 1) produce 2) that produces 3) to produce 4) producing

12- 1) to evaluate hydrogen emissions 2) evaluating hydrogen emissions
3) for hydrogen emissions to evaluate 4) hydrogen emissions evaluated

13- 1) emissions for 2) it is emitted as 3) is emitted for 4) to be emitted

14- 1) less of 2) as little 3) fewer 4) fewer of

15- 1) reduction 2) reduced 3) that reduces 4) to reduce

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

The interpolation problem for a function of a continuous argument, given discrete data, is closely related to the problem of constructing variational-difference schemes and continuous representations of solutions of difference problems. For as a rule, in order to obtain the difference equations, one has to discretize the operator and the solution of the problem by taking suitable projections. At the same time the solution of the differential problem usually represents an approximate solution of the original problem on a discrete set of points. Let us assume that the difference problem has been solved and that we know the approximate solution of the problem. The procedure now involves an interpolation from the results obtained onto the whole region on which the solution of the original problem is sought. An interpretation of this kind requires that certain conditions are taken into account: namely, if the solution of the difference equations has been obtained with a certain accuracy, then the accuracy of the interpolation must be at least as high. If we possess additional information regarding the error of the approximate solution, then the interpolation may be implemented, not from the exact data, but from those involving possible error at the net points. *A priori* information about the smoothness of solutions may then also allow one to improve the

accuracy of the approximate solution in some cases, using one or another difference method. Apart from this, the interpolation problem also has its own merits.

As a rule, the interpolation algorithms for the exact data, specified on a discrete set of points, are based on Lagrange interpolation polynomials. Also, the interpolated function $\phi(x)$ is *a priori* assumed to be suitably differentiable.

Another problem closely related to interpolation arises when the function values of ϕ at the net points x_k are known only up to a certain error, the maximum magnitude of which is *a priori* known at each of the points. In this case, we want to construct a curve which would be in some sense the best approximation of the function, the latter being specified at the net points up to random errors. Problems of this kind are usually solved by the least-squares method.

The theory of interpolation has been enriched recently by what is known as spline interpretation methods. Usually a spline is a piecewise-polynomial function defined in the region D, i.e., a function for which there exists a decomposition of D into subregions in each of which the function is a polynomial of some degree m. Also the function, as a rule, is continuous in D, together with its derivatives to order m - 1, and the mth derivatives are square integrable. In practice, the most often used polynomials are cubics.

16- Choose and mark the correct choice.

1) Certain piecewise cubic polynomials serve as splines.
2) Splines are integrable functions only if they are piesewise squared functions.
3) Spliens may not be integrable in their defined subregions.
4) Least squares approximations are preferred over spline interpolation.

17- When the function values at the data points are known to have errors, ---------- may appropriately be employed.

1) an interpolatory spline function
2) a polynomial least squares approximation
3) a least squares approximate model
4) a piecewise polynomial interpolation

18- Select the best choice for the meaning of the underlined word "argument" in the first paragraph.

1) reasoning
2) statement
3) deduction
4) independent variable

19- Least squares models ---------- of functions with known approximate values.

1) are best developed as polynomials
2) are preferred as approximations
3) serve as approximations while interpolatory functions serve as exact modes
4) and interpolatory functions both serve as approximations

20- Piecewise polynomial ----------.

1) with certain continuity properties are constructed as splines
2) can only serve as splines
3) are the only functions being used in interpolation
4) are considered to be splines only if the polynomial pieces are cubic

PASSAGE 2:

Geometric-modeling methods are a synthesis of techniques from many fields: analytic and descriptive geometry, topology, set theory, numerical analysis, vector calculus, and matrix methods, to name a few. Originally, only a loose ad hoc assembly, they have coalesced into an independent discipline with a well-defined language and logic.

Where we were once satisfied with two-dimensional representations of physical objects, we now demand and achieve topologically and analytically complete three-dimensional models. Furthermore, these models allow us to derive quickly and automatically any geometric property or attribute that the object is likely to possess. Obviously, appearance is not the sole concern of geometric modeling, so we carefully distinguish between analytical models and rendering. We also require a mathematical setting that allows us to calculate relationships between models—closest approach, intersections, shadowing, and so forth. In many situations, we are interested in representing arbitrary shape information—shapes that do not have special names and whose characteristics are not well defined. The technologies serviced by geometric-modeling schemes continue to stretch those schemes to the limits of their capabilities.

We identify three distinct aspects of geometric modeling: (1) Representation: The physical shape of an object is given and presumed to be fixed; we compute a mathematical approximation once. (2) Design: We must create a new shape to satisfy some operational or aesthetic objectives. We manipulate the variables defining the shape until we meet the objectives. (3) Rendering: We usually need an image of the model to visually interpret it. These three aspects are, of course, closely related; for example, when we create the geometric model of a new product, at first, the model represents a physically nonexistent object. The model must be suitable for analysis and evaluation. After selecting a specific design, we can use its geometric model to guide the manufacture of the object. When production is complete, the model finally represents the physical shape of an existing object. At any point in this process, the geometric model provides information for rendering visual images of the object, including engineering drawings and computer graphics displays.

Computer graphics, computer-aided design (CAD), and computer-aided manufacturing (CAM) have been the driving forces behind the rapid development of geometric-modeling schemes. And, naturally, it is in these very areas that we can apply geometric modeling most effectively. Robotics, computer vision, and artificial intelligence are also making increasing demands on geometric-modeling capabilities. Let us review the traditional applications.

Computer graphics systems now routinely produce realistic two-dimensional color-shaded renderings of three-dimensional objects. Solid modeling, polygonal, and sculptured-surface techniques have made this possible: They now produce the appearance of texture and translucence and the effects of multiple light sources. Art, animation, and reality simulation are contributing their own impetus to the state of the art, as in several popular feature films and, of course, in generating scenes for aircraft flight simulators.

21- Geometric modeling ----------.
1) methods have shown to be impractical
2) methods are not dependent on mathematical logic
3) methods employ technically loose and ad hoc mathematical approaches
4) is engaged with well-developed mathematical methods

22- Select the wrong statement about geometric medaling.
1) Appearance is the only concern.
2) computer graphics applications have been made.
3) Production of two dimensional images is made possible.
4) Artificial intelligence has benefitted from it.

23- Select the best choice for the meaning of the underlined word "distinguish" in the second paragraph.
1) separate 2) glorify 3) derive 4) articulate

24- A geometric model ----------.
1) needs to be visually verified
2) is not useful in computer vision
3) is needed to be analyzed and evaluated
4) is finding less applications in CAD and CAM

25- Robotics and computer vision ----------.
1) are examples of CAD
2) make use of geometric models
3) are examples of CAM
4) are instances of reality simulation

PASSAGE 3:

If one has several vectors in C^n or several matrices in M_n, what might it mean to say that some are "small" or that others are "large"? Under what circumstances might we say that two vectors are "close together" or "far apart"?

Questions of "size" and "proximity" in a two- or three-dimensional real vector space usually refer to Euclidean distance. The Euclidean length of a vector $z \in R^n$ is $(z^T z)^{1/2} = (\sum z_i^2)^{1/2}$, and z is said to be "small" (with respect to this measure) if this nonnegative real number is small. The vectors x and y, furthermore, are "close" if the Euclidean length of the difference $z = x - y$ is a small number.

What may be said about the "size" of matrices, which may be thought of as vectors in a higher-dimensional space? What about vectors in infinite-dimensional spaces? What about complex vectors? Are there useful ways to measure the "size" of real vectors other than by Euclidean length?

One way to answer these questions is to study *norms*, or measures of size, of matrices and vectors. Norms may be thought of as generalizations of Euclidean length, but the study of norms is more than an exercise in mathematical generalization. It is necessary for a proper formulation of notions such as power series of matrices, and it is essential in the analysis and assessment of algorithms for numerical computations. Furthermore, different acceptable norms may be more or less convenient in various situations, so that it is appropriate to study properties common to all norms, rather than to restrict attention to any single norm.

26- Norms are used to show ----------.
1) only closeness of vectors
2) only remoteness of matrices
3) the distance between vectors
4) similarity of vectors and matrices

27- The size of a vector can be determined ----------.
1) by any vector norm
2) merely by its Euclidean length
3) by any appropriate norm only if the size turns to be large
4) by its Euclidean distance only if the size turns to be small

28- Select the best choice for the meaning of the underlined word "assessment" in the last paragraph.
1) evaluation
2) complexity
3) competitiveness
4) convergence

29- The use of norms ----------.
1) is not appropriate for analysis of algorithms
2) complicates the assessment of algorithms
3) is merely appropriate for measuring the size of matrices and vectors
4) extends beyond an exercise in a mathematical generalization

30- Choose and mark the correct choice.
1) Common properties of norms are insignificant.
2) Acceptable norms may all turn to be useful in various applications.
3) Attention to any single norm is inappropriate.
4) Acceptable norms may have inappropriate properties.

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱و۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\log\frac{۲-x}{x-\sqrt{x^۲-۲x+۲}}$، کدام است؟
۱) $(۰,۱)$
۲) $(۱,۲)$
۳) $(۰,۲)$
۴) $(-\infty,۲)$

۳۲- مساحت رویهٔ دوار حاصل از دوران منحنی $y=۲\sin^۳ t$ و $x=۲\cos^۳ t$، حول محور xها، کدام است؟
۱) ۶π
۲) $\frac{۲۴\pi}{۵}$
۳) ۱۲π
۴) $\frac{۴۸\pi}{۵}$

۳۳- مساحت کل ناحیهٔ بستهٔ درون منحنی قطبی $r = \cos 2\theta$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$

۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) π

۳۴- حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محصور به محور yها و یک طاق از منحنی $x = 1 - \cos t$ و $y = t - \sin t$، حول محور y ها، کدام است؟

۱) $4\pi^2$

۲) $5\pi^2$

۳) $6\pi^2$

۴) $7\pi^2$

۳۵- در کدام بازهٔ سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n \ln n}$، همگرای مطلق است؟

۱) $(-1,2)$

۲) $[-1,2)$

۳) $(-1,2]$

۴) $[-1,2]$

۳۶- اگر $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x} - 1 - 2x)\ln(1-x^3)}{(1-\cos 3x)^n} = a$، باشد، مقدار $\frac{a}{n}$ کدام است؟

۱) $\frac{-16\sqrt{2}}{5\times 3^5}$

۲) $\frac{8\sqrt{2}}{5\times 3^5}$

۳) $\frac{16\sqrt{2}}{3^5}$

۴) $\frac{-8\sqrt{2}}{5\times 3^5}$

۳۷- فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{۲xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$، مقدار $f_{yx}(۰,۰)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۲−

۴) وجود ندارد.

۳۸- مقدار مشتق سویی مرتبهٔ دوم تابع $f(x,y)=x^۲e^{(xy)}$، در نقطهٔ $(۱,۰)$ در سویی که با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد، کدام است؟

۱) ۵

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ۴

۴) $\frac{۹}{۲}$

۳۹- فرض کنید $A=\int\int_{\mathbb{R}^۲}\frac{dxdy}{(x^۲+y^۲+۱)^k}$، به‌ازای کوچکترین مقدار صحیح ممکن برای k همگرا باشد، مقدار A کدام است؟ ($\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است.)

۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) ۲π

۳) π

۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۴۰- فرض کنید S سطح واقع بر کرهٔ $x^۲+y^۲+(z-۲)^۲=۸$ باشد که در بالای صفحهٔ xy قرار گرفته است. اگر میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=y^۲\cos(xz)\hat{i}+x^۳e^{(yz)}\hat{j}-e^{-(xyz)}\hat{k}$، از سطح S گذر کند، مقدار $\int\int_S \text{Curl}\,\vec{F}.\hat{n}dS$ کدام است؟ ($\hat{n}$ بردار قائم یکه برونسو بر سطح S است.)

۱) ۸π

۲) ۱۰π

۳) ۱۲π

۴) ۱۶π

۴۱- به‌ازای کدام مقدار مثبت a، شعاع همگرایی پاسخ سری معادلهٔ دیفرانسیل $(x^۲+a^۲)y''+۲xy'+۴x^۲y=۰$ در اطراف نقطه $x=-\frac{۳}{۲}$ برابر $R=\frac{۵}{۲}$ خواهد بود؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۴۲- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $(x-y)^۲y'=۴$ کدام است؟

۱) $y=\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{x-y-۲}{x-y+۲}\right)+c$

۲) $y=\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{x-y+۲}{x-y-۲}\right)+c$

۳) $y=\ln\left(\frac{x-y-۲}{x-y+۲}\right)+c$

۴) $y=\ln\left(\frac{x-y+۲}{x-y-۲}\right)+c$

۴۳- جواب معادلهٔ انتگرال $y'-۳y-۲\int_۰^x y(t)dt=u_۲(x)$، با شرط اولیه $y(۰)=۰$، کدام است؟ (**u** تابع پله است.)

۱) $\frac{۲\sqrt{۱۷}}{۱۷}u_۲(t)e^{-\frac{۳t}{۲}+۳}\cosh\left(\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}(t-۲)\right)$

۲) $\frac{۲\sqrt{۱۷}}{۱۷}u_۲(t)e^{\frac{۳t}{۲}-۳}\cosh\left(\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}(t-۲)\right)$

۳) $\frac{۲\sqrt{۱۷}}{۱۷}u_۲(t)e^{-\frac{۳t}{۲}+۳}\sinh\left(\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}(t-۲)\right)$

۴) $\frac{۲\sqrt{۱۷}}{۱۷}u_۲(t)e^{\frac{۳t}{۲}-۳}\sinh\left(\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}(t-۲)\right)$

۴۴- لاپلاس وارون تابع $F(s)=\frac{1}{3^s\sqrt{2s+1}}$ برای $t>\ln 2$ کدام گزینه است؟ (راهنمایی: $\Gamma(x)$ تابع گاما است و $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$)

۱) $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi(t-\ln 2)}}$

۲) $\frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\ln 2)}}{\sqrt{2\pi t}}$

۳) $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi(t-\ln 2)}}$

۴) $\frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\ln 2)}}{\sqrt{2(t-\ln 2)}}$

۴۵- جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $xy''+y'=4x\ln x$ که منحنی آن از نقطه $(1,1)$ عبور کرده و در نقطه $x=0$ مقدار مشتق تابع محدود است، کدام است؟

۱) $x^2\ln x+1$

۲) $x^2\ln\frac{x}{e}+2$

۳) $\frac{1}{2}x^2\ln\frac{x}{e}+\frac{3}{2}$

۴) $\frac{1}{2}x^2\ln x+1$

۴۶- برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی، کدام‌یک از گزاره‌های زیر با هم معادل (هم ارز) هستند؟
(اندیس‌ها مقید به اعداد طبیعی و ε مقید به اعداد حقیقی مثبت است.)

الف) $\forall\varepsilon\exists N\forall n(n>N\wedge|a_n-a_N|<\varepsilon)$

ب) $\forall\varepsilon\exists N\forall k\forall n(n>N\Rightarrow|a_{N+k}-a_n|<\varepsilon)$

ج) $\exists N\forall\varepsilon\forall k\forall n(n>N\Rightarrow|a_{n+k}-a_n|<\varepsilon)$

د) $\forall\varepsilon\exists N\forall n\forall m(n,m>N\Rightarrow|a_m-a_n|<\varepsilon)$

هـ) $\exists N\forall\varepsilon\exists m\exists n(m,n>N\wedge|a_m-a_n|<\varepsilon)$

۱) (ب) و (د)

۲) (الف) و (د)

۳) (ج) و (د)

۴) (ج) و (هـ)

۴۷- فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی مفروض باشد. رابطهٔ هم ارزی R را در X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $xRx' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$. مجموعهٔ دسته‌های هم‌ارزی در X با کدام مجموعه هم‌عدد است؟

۱) Y

۲) X

۳) $f(X)$

۴) $Y|f(X)$ ($f(X)$ در Y مکمل)

۴۸- فرض کنید $A_k = \{x \in \mathbb{R} : -۱ \le [kx] \le k\}$، $A = \bigcap_{k=۱}^{\infty} A_k$ و $B = \bigcup_{k=۱}^{\infty} A_k$. $[.]$ نماد جزء صحیح است و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی. کدام گزینه درست است؟

۱) $A = (۰, ۱)$ و $B = (-۱, ۲)$

۲) $A = (۰, ۱)$ و $B = [۰, ۲)$

۳) $A = [۰, ۱)$ و $B = (-۱, ۲)$

۴) $A = [۰, ۱]$ و $B = [-۱, ۲)$

۴۹- اگر $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، تعریف می‌کنیم $\bigcup A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ (P نماد مجموعهٔ توانی است.)

(الف) به‌ازای هر A، $P(\bigcup A) = A$

(ب) اگر هر عضو A عضو مجموعهٔ B باشد، آنگاه $\bigcup A \subseteq B$.

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب)

۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

۵۰- تابع انتخاب برای مجموعهٔ X تابعی مانند $F : (p(X) - \{\phi\}) \to X$ است به‌طوری که برای هر $\phi \ne A \subseteq X$، $F(A) \in A$. گزاره‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

(الف) یک تابع انتخاب برای $\mathbb{N}$ (مجموعهٔ اعداد طبیعی) وجود دارد.

(ب) یک تابع انتخاب برای $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) وجود دارد.

اثبات کدام‌یک از گزاره‌های فوق الزاماً نیازمند استفاده از اصل انتخاب است؟

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب)

۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

۵۱- فرض کنیم $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهایی از $\mathbb{R}^۳$ هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$W_۱ = \{(a, b, c) \mid a = b = c\}$$

$$W_۲ = \{(a, b, c) \mid a + b + c = ۰\}$$

در این‌صورت $\dim W_۱ + \dim W_۲$ برابر است با:

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۵۲- کدام‌یک از موارد زیر به‌ازای هر ماتریس $A \in M_۲(\mathbb{R})$ برقرار است؟

۱) $tr(A^۲) \geq ۰$

۲) $A^۲ = tr(A)A - (\det A)I$

۳) همهٔ درایه‌های روی قطر $A^۲$ بزرگتر یا مساوی صفر هستند.

۴) همهٔ مقادیر ویژهٔ حقیقی $A^۲$ بزرگتر یا مساوی صفر هستند.

۵۳- در فضای برداری ماتریس‌های ۲×۳، بعد زیرفضای W تولید شده توسط ماتریس‌های

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۰ & ۵\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۷\\ ۱۰ & ۱ & ۱۳\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۵\\ ۸ & ۲ & ۱۱\end{bmatrix}$$

کدام گزینه است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۵۴- فرض کنید $P_۲[x]$ فضای برداری متشکل از همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر ۲ با ضرایب حقیقی باشد. اگر $T: P_۲[x] \to P_۲[x]$ یک تبدیل خطی با ضابطهٔ

$$T(a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲) = (۳a_۰) + (۶a_۰ + ۵a_۱)x + (۴a_۰ - ۳a_۲)x^۲$$

باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ویژهٔ T کدام است؟

۱) -۴۵

۲) صفر

۳) ۶۰

۴) ۷۲

۵۵- فرض کنید $\alpha = (a, b, c) \in \mathbb{R}^۳$ بردار ثابت ناصفری باشد و تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را به‌صورت $T(v) = \alpha \times v$ تعریف می‌کنیم (در اینجا $\alpha \times v$ ضرب خارجی بردارهای α و v است). یک مقدار ویژه T و یک بردار ویژه متناظر به‌ترتیب برابرند با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ و $v = (۴a, -\frac{۱}{۲}b, \frac{۱}{۲}c)$

۲) $\frac{۱}{۲}$ و $v = \alpha$

۳) ۰ و $v = (۴a, \frac{۱}{۲}b, -\frac{۱}{۲}c)$

۴) ۰ و $v = \frac{۱}{۲}\alpha$

۵۶- مجموعهٔ $\left\{x : x > ۰ , \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n} < \infty\right\}$ کدام است؟

۱) $(۰ , ۱]$

۲) $(۰ , e)$

۳) $(۰ , e]$

۴) $(۰ , \infty)$

۵۷- فرض کنید تابع حقیقی مقدار f بر $[۰ , ۱]$ پیوسته و بر $(۰ , ۱)$ مشتق‌پذیر باشد. به‌علاوه $f(۰) = ۰$ و به‌ازای هر $x \in (۰ , ۱)$، $۰ \le f'(x) \le \frac{۱}{۲} f(x)$. در این‌صورت کدام گزینه درست است؟

۱) f تابع ثابت صفر است.

۲) همواره $f(x) \le e^{x^۲}$ ولی f لزوماً تابع ثابت صفر نیست.

۳) f تابعی صعودی است ولی لزوماً تابع ثابت صفر نیست.

۴) f بر یک همسایگی صفر برابر صفر است ولی لزوماً تابع ثابت صفر نیست.

۵۸- فرض کنید تابع $f : (۰ , \infty) \to (۰ , \infty)$ پیوسته باشد و برای هر عدد طبیعی n مجموعهٔ $\left\{x : f(x) > \frac{۱}{n}\right\}$ کراندار باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) هر دو حد $\lim_{x \to \infty} f(x)$ و $\lim_{x \to ۰^+} f(x)$ موجود هستند.

۲) $\lim_{x \to ۰^+} f(x)$ موجود است اما ممکن است $\lim_{x \to \infty} f(x)$ موجود نباشد.

۳) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ موجود است اما ممکن است $\lim_{x \to ۰^+} f(x)$ موجود نباشد.

۴) ممکن است هیچ‌یک از دو حد $\lim_{x \to ۰^+} f(x)$ و $\lim_{x \to \infty} f(x)$ موجود نباشد.

۵۹- فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دارای خاصیت زیر باشد:

به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ تابعی یکنواخت پیوسته بر $\mathbb{R}$ مانند g وجود دارد به‌طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$، $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$.

کدام گزینه درست است؟

۱) f ممکن است در هیچ نقطه‌ای پیوسته نباشد.

۲) f یکنواخت پیوسته است.

۳) f تعداد نامتناهی نقطه پیوستگی دارد ولی الزاماً بر $\mathbb{R}$ پیوسته نیست.

۴) f پیوسته است ولی الزاماً یکنواخت پیوسته نیست.

۶۰- فرض کنید $f : [۰ , ۱] \to [۰ , ۱]$ تابعی پیوسته غیرثابت باشد و $E = \{x \in [۰ , ۱] : f(x) = x\}$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $E \neq \varnothing$

۲) E بسته است.

۳) اگر E نامتناهی باشد لزوماً ناشمارا است.

۴) اگر $fof = f$ آن‌گاه E یک بازه است.

۶۱- در یک دستگاه ممیز شناور برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۲ با ۳ رقم مانتیس و روش گرد کردن فاصله بین عدد ۸ و نزدیک‌ترین عدد قابل نمایش بزرگتر از ۸ چقدر است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

۶۲- فرض کنید A، $m\times n$ و b، $m\times ۱$، هستند. مقدار $\min_{x}\left\|A^{T}Ax-A^{T}b\right\|_{۲}$ .....

۱) برابر است با صفر

۲) ناصفر است اگر $n >$ رتبه (A)

۳) صفر است اگر و تنها اگر رتبه $n = (A)$

۴) برابر است با صفر اگر x^{*} جواب مربوط یکتا باشد.

۶۳- ضرایب چند جمله‌ای درون‌یاب برای نقاط متمایز $(x_i,y_i)\ ,i=۱,...,n$، با یک چند جمله‌ای از درجه کوچک‌تر از یا مساوی با $n-۱$ با استفاده از توابع پایه $\prod_{k=۱}^{j-۱}(x-x_k)$، به ازای $۱\le j\le n$، از حل یک دستگاه ..... بدست می‌آیند.

۱) بالا مثلثی

۲) با تعداد نامتناهی جواب

۳) پایین مثلثی به‌صورت یکتا

۴) با قطرهای ماتریس ضرایب برابر با یک

۶۴- فرض کنید نقاط متمایز $(x_i,f(x_i))\ ,i=۰,۱,...,n$، با یک چند جمله‌ای از درجه n درون‌یابی شوند. دراین‌صورت، با تعریف $L_n(x)=\prod_{j=۰}^{n}(x-x_j)$، کسر تفاضلی $f[x_۰,x_۱,...,x_n]$ برابر است با .....

۱) $\sum_{i=۰}^{n}\frac{f(x_i)}{L_n'(x_i)}$

۲) $\sum_{i=۰}^{n}f(x_i)\frac{L_n(x_i)}{L_n'(x_i)}$

۳) $\sum_{i=۰}^{n}f(x_i)L_n'(x_i)$

۴) $\sum_{i=۰}^{n}f(x_i)\frac{L_n'(x_i)}{L_n(x_i)}$

۶۵- تخمین انتگرال برای $I=\int_a^b f(x)dx$ را با یک روش نیوتن ـ کوته وفقی در نظر بگیرید که در آن، $I=A_1+C_m f^{(d)}(\eta_1)h^d=A_2+C_m[f^{(d)}(\eta_2)h^d]\frac{1}{2^d}$ با $h=\frac{b-a}{m-1}$ و $\eta_1,\eta_2\in[a,b]$ و درجه چندجمله‌ای به‌کار رفته برابر با $d-1$ ، A_1 ، A_2 به‌ترتیب تخمین نیوتن ـ کوته m نقطه‌ای روی $[a,b]$ و تخمین نیوتن ـ کوته m نقطه‌ای روی دو زیر بازه مساوی پس از تقسیم $[a,b]$ هستند. دراین‌صورت، تخمین خطای انتگرال برای A_2، یعنی $|I-A_2|$ تقریباً برابر است با .....

۱) $\frac{|A_2-A_1|}{2^d+1}$

۲) $\frac{|A_2-A_1|}{2^{d+1}}$

۳) $\frac{|A_2-A_1|}{2^d}$

۴) $\frac{|A_2-A_1|}{2^d-1}$

۶۶- واریانس معیار مناسبی برای اندازه‌گیری پراکندگی داده‌های با مقیاس لااقل ..... است و اگر تمام داده‌ها ..... باشند آن‌گاه واریانس آن‌ها ..... خواهد بود.

۱) فاصله‌ای ـ برابر ـ صفر
۲) ترتیبی ـ هم‌فاصله ـ بزرگتر از یک
۳) فاصله‌ای ـ هم‌فاصله ـ بزرگتر از یک
۴) ترتیبی ـ برابر ـ صفر

۶۷- میانگین ۲۰ دادهٔ عددی برابر با ۱۲ شده است. اگر ۵ دادهٔ عددی جدید با میانگین ۱۰ به این داده‌ها افزوده شوند، مقدار میانگین ۲۵ دادهٔ ادغام شده چقدر است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۱/۴
۳) ۱۱/۵
۴) ۱۱/۶

۶۸- فرض کنید پیشامدهای $B_1,\ldots,B_n$ توأما مجزا باشند و $B=U_{j=1}^n B_j$، اگر برای هر $j=1,\ldots,n$ داشته باشیم $P(B_j)>0$ و $P(A|B_j)=p$، آن‌گاه گزینه صحیح در مورد $P(A|B)$ کدام است؟

۱) $P(A|B)=\frac{p}{n}$
۲) $P(A|B)=p$
۳) $P(A|B)>p$
۴) $P(A|B)=\min(1,np)$

۶۹- فرض کنید A ، B ، C سه پیشامد مستقل و $A\subset B\subset C$ دراین‌صورت:

۱) $P(C)=1, P(A)=0$
۲) $P(A)=1$ یا $P(C)=0$
۳) $P(A)=0$ یا $P(C)=1$
۴) $P(C)=1, P(A)=1$

۷۰- **یک کمیته شامل $۶n$ نفر که نصف آن مرد و نصف دیگر زن است. یک مرد به تصادف انتخاب می‌شود. او از بین $۶n-۱$ نفر باقی‌مانده n نفر را برای تشکیل کمیته‌ای ویژه انتخاب می‌کند. اگر n فرد انتخابی جنسیت یکسان داشته باشند، احتمال اینکه همگی زن باشند چقدر است؟**

۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۳n}{۶n-۱}$

۳) ۲

۴) $\frac{\binom{۳n}{n}}{۲\binom{۶n-۱}{n}}$

آنالیز ریاضی:

۷۱- **فرض کنید X و Y دو فضای متریک و $f: X \to Y$ یک تابع باشد. کدام گزینه معادل با پیوستگی تابع f نیست؟**

۱) f بر هر زیرمجموعه فشرده X پیوسته است.

۲) f بر هر زیرمجموعه همبند X پیوسته است.

۳) برای هر زیرمجموعه A از X، $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۴) برای هر زیرمجموعه B از Y، $f^{-۱}(\text{int } B) \subseteq \text{int } (f^{-۱}(B))$.

۷۲- **فرض کنید X فضای متریک و Y زیرفضای X باشد. کدام گزینه درست است؟**

۱) هر مجموعه فشرده در فضای Y در فضای X نیز فشرده است.

۲) هر مجموعه باز در فضای Y در فضای X نیز باز است.

۳) هر مجموعه بسته در فضای Y در فضای X نیز بسته است.

۴) هر مجموعه بسته و کراندار در فضای Y در فضای X فشرده است.

۷۳- **دنباله توابع $f_n(x) = e^{-nx}(x+\frac{۱}{n})$ بر $[۰, ۱]$ تعریف شده است. کدام گزینه نادرست است؟**

۱) دنباله $\{f_n'\}$ یکنواخت همگرا به صفر است.

۲) دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کراندار و یکنواخت همگرا به صفر است.

۳) دنباله $\{f_n'\}$ یکنواخت کراندار است ولی یکنواخت همگرا به صفر نیست.

۴) دنباله $\{f_n'\}$ یکنواخت کراندار و در هر نقطه به صفر همگرا است.

۷۴- فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته و غیرثابت است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$.

۲) $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\big(f(x)-f(1)\big)\,dx \neq 0$.

۳) $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1)$.

۴) برای هر $0<a<1$، $\lim_{n\to\infty} n\int_0^a x^n\big(f(x)-f(1)\big)\,dx = 0$.

۷۵- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع نامنفی و پیوسته بر $\mathbb{R}$ باشد که به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=1$. کدام گزینه درست است؟

۱) بر هیچ زیرمجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{R}$، نمی‌توان همگرایی یکنواخت $\sum f_n$ را نتیجه گرفت.

۲) همگرایی $\sum f_n$ بر هر زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$، یکنواخت است و شرط بسته بودن ضروری است.

۳) همگرایی $\sum f_n$ بر هر بازه کراندار، یکنواخت است و شرط کرانداری بازه ضروری است.

۴) همگرایی $\sum f_n$ بر هر زیرمجموعه حداکثر شمارای $\mathbb{R}$ یکنواخت است و شرط شمارا بودن ضروری است.

۷۶- فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و دنبالهٔ توابع $\{f_n\}$ بر $[0,1]$ با ضابطهٔ زیر تعریف شود:

$$f_n(x)=\frac{f(x)\sin x^n}{1+n^{\alpha}x^m}$$

که در آن $\alpha>0$ و $m\in\mathbb{N}$. در این‌صورت دنبالهٔ $\{f_n\}$:

۱) بر $[0,1]$ یکنواخت همگرا است.

۲) در هر نقطه $[0,1]$ همگراست ولی همگرایی آن یکنواخت نیست.

۳) در برخی نقاط بازهٔ $[0,1]$ همگراست و در برخی نقاط همگرا نیست.

۴) در هیچ نقطه‌ای از $[0,1]$ همگرا نیست.

۷۷- اگر K زیرمجموعه‌ای شمارا در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ باشد و $\mathbb{R}$ را با $\mathbb{R}\times\{0\}$ یکی بگیریم، کدام گزینه درست است؟

۱) $\mathbb{R}\cup K$ مجموعه‌ای همبند است.

۲) $\mathbb{R}\setminus K$ مجموعه‌ای همبند است.

۳) $\mathbb{R}\cap K$ مجموعه‌ای همبند است.

۴) $\big(\mathbb{R}^2\setminus K\big)\cup\mathbb{R}$ مجموعه‌ای همبند است.

۷۸- فرض کنید X یک فضای متریک و $f_n:X\to X$ دنباله‌ای هم‌پیوسته از توابع بر X باشد که نقطه‌وار به تابع $f:X\to X$ همگرا است. کدام شرط برای پیوستگی یکنواخت f ضروری است؟

۱) دنباله $\{f_n\}$ به f همگرای یکنواخت بر X باشد.

۲) X فشرده باشد.

۳) X کامل باشد.

۴) هیچ شرطی.

۷۹- مقدار $\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{n+\sin(nx)}{3n+\sin^{2}(nx)}dx$ ،کدام است؟

۱) صفر

۲) $+\infty$

۳) $\frac{\pi}{3}$

۴) موجود نیست.

۸۰- **فرض کنید (X,d) یک فضای متریک است که در آن هر مجموعه تک‌عضوی باز است. کدام گزینه درست است؟**

۱) متر d مضربی از متر گسسته است.

۲) (X,d) یک فضای متریک کامل (Complete) است.

۳) هر زیرمجموعه ناتهی و همبند از X، تک‌عضوی است.

۴) هر زیرمجموعه ناتهی و فشرده از X، تک‌عضوی است.

۸۱- **فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای متریک (X,d) است. کدام گزینه نادرست است؟**

۱) اگر هر نقطه از A، حد یک دنباله از نقاط متمایز A باشد، آنگاه A نقطه تنها ندارد.

۲) اگر هر نقطه از X، حد یک دنباله از نقاط A باشد، آنگاه A در X چگال است.

۳) اگر حد هر دنباله از نقاط A، عضو A باشد، آنگاه A بسته است.

۴) اگر هر دنباله کراندار از نقاط A، دارای زیردنباله‌ای همگرا در A باشد، آنگاه A فشرده است.

۸۲- **کدام گزینه دربارهٔ سری‌های $A=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^{n+2}x-\sin^{n}x\right)\sin(nx)$ بر $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n^{x+1}}$ بر $\left[\frac{1}{2},1\right]$ درست است؟**

۱) هر دو همگرای یکنواخت هستند.

۲) هیچ یک همگرای یکنواخت نیستند.

۳) B همگرای یکنواخت است ولی A همگرای یکنواخت نیست.

۴) A همگرای یکنواخت است ولی B همگرای یکنواخت نیست.

۸۳- **اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nxe^{-nx^{2}}$ آنگاه $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$ کدام است؟**

۱) صفر

۲) $e-\frac{1}{e}$

۳) $\frac{1}{e}-e$

۴) موجود نیست.

۸۴- کدام گزینه دربارهٔ دنباله‌های توابع $A=\left\{\frac{1}{\cosh(x+n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $B=\left\{\frac{1}{1+\sinh^2(1-n^2x^2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ بر $\mathbb{R}$ درست است؟

۱) هر دو همگرای یکنواخت هستند.

۲) هیچ کدام همگرای یکنواخت نیستند.

۳) A همگرای یکنواخت است ولی B همگرای یکنواخت نیست.

۴) B همگرای یکنواخت است ولی A همگرای یکنواخت نیست.

۸۵- فرض کنید $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای با جملات متمایز در $\mathbb{R}$ باشد و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $A_n=\{x_k : k\geq n\}$ و $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n'$ که A_n' مجموعه نقاط حدی A_n است. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $A=\{a\}$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

۲) مجموعه A حداکثر شمارا است.

۳) اگر دنباله $\{x_k\}$ کراندار باشد، آنگاه A ناتهی است و شرط کرانداری ضروری است.

۴) اگر A ناتهی و کراندار باشد، آنگاه $\overline{\lim} x_n = \sup A$ و $\underline{\lim} x_n = \inf A$

۸۶- فرض کنید A مجموعه‌ای در فضای متریک X باشد. با توجه به نمادهای $\text{int}A=$ درون A، $A^c=X\setminus A$، $\partial A=$ مرز A و $\bar{A}=$ بستار A، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(\text{int}A)^c=\overline{A^c}$.

۲) $\text{int}\partial A=\varnothing$.

۳) $\text{int}(A^c)=(\bar{A})^c$.

۴) $\text{int}\partial\bar{A}=\varnothing$.

۸۷- فضاهای متریک X و Y و Z، تابع $f:X\to Y$ تابع پیوسته و یک به یک $g:Y\to Z$ را در نظر بگیرید به‌گونه‌ای که تابع gof پیوسته یکنواخت باشد. از کدام شرط نتیجه می‌گیریم تابع f پیوسته یکنواخت است؟

۱) Y فشرده باشد.

۲) f پیوسته باشد.

۳) g پیوسته یکنواخت باشد.

۴) Z و X هر دو فشرده باشند.

۸۸- فرض کنید $f_1(x)=1+\sin x$ و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $f_{n+1}(x)=\sqrt{2+f_n(x)}$ کدام گزینه درباره دنباله $\{f_n\}$ درست است؟

۱) بر $\mathbb{R}$ همگرای نقطه‌وار نیست.

۲) بر $\mathbb{R}$ یکنواخت همگرا است.

۳) بر بازه‌های کراندار $\mathbb{R}$ یکنواخت همگرا است ولی بر $\mathbb{R}$ یکنواخت همگرا نیست.

۴) بر $\mathbb{R}$ همگرای نقطه‌وار است ولی بر هیچ بازهٔ با طول مثبت در $\mathbb{R}$ یکنواخت همگرا نیست.

۸۹- فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ سری مک لوران تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $r\in\mathbb{R}$ شعاع همگرایی آن باشد. شرط لازم و کافی برای همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ کدام است؟

۱) $r>1$.

۲) مجموع جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ کراندار باشد و $r\geq 1$.

۳) تابع f در نقطه $a=1$ از چپ پیوسته باشد و $r\geq 1$.

۴) سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ بر $[0,1]$ یکنواخت همگرا باشد.

۹۰- فرض کنید X یک مجموعه و d_1 و d_2 دو متر روی X باشند به‌طوری‌که برای هر $x,y\in X$، $d_1(x,y)\leq d_2(x,y)$. در این‌صورت کدام گزینه درباره $A\subseteq X$ درست است؟

۱) اگر A در (X,d_2) بسته باشد، آنگاه A در (X,d_1) نیز بسته است.

۲) اگر A در (X,d_1) فشرده باشد، آنگاه A در (X,d_2) نیز فشرده است.

۳) هر نقطه حدی A در (X,d_2) یک نقطه حدی A در (X,d_1) است.

۴) هر نقطه درونی A در (X,d_2) یک نقطه درونی A در (X,d_1) است.

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات:

۹۱- روی مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$، عمل دوتایی $*$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{0\};\quad x*y=\begin{cases}6xy & ;x>0\\ \dfrac{x}{6y} & ;x<0\end{cases}$$

در این‌صورت، وارون عضو ۱۰ نسبت به عمل $*$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{60}$

۲) $\frac{1}{360}$

۳) $\frac{1}{10}$

۴) $\frac{1}{60}$

۹۲- کدام گزینه در مورد ایده‌ال‌های حلقه $\mathbb{Z}$ صحیح است؟

۱) $\langle 5\rangle+\langle 12\rangle=\langle 60\rangle$

۲) $\langle 5\rangle\cap\langle 12\rangle=\{0\}$

۳) $\langle 8\rangle+\langle 12\rangle=\langle 24\rangle$

۴) $\langle 8\rangle\cap\langle 12\rangle=\langle 24\rangle$

۹۳- اگر $f : \mathbb{Z}_{۲۰} \to \mathbb{Z}_{۲۰}$ یک یکریختی گروهی باشد، آنگاه $f(۳)$ با کدام گزینه نمی‌تواند برابر باشد؟

۱) ۵

۲) ۷

۳) ۹

۴) ۱۱

۹۴- فرض کنید R و S دو حلقه یکدار و $f : R \to S$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای ناصفر باشد. در این‌صورت، کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر S یک حوزه صحیح باشد، آنگاه R نیز یک حوزه صحیح است.

۲) اگر R یک حوزه صحیح باشد، آنگاه S نیز یک حوزه صحیح است.

۳) اگر S یک حوزه صحیح باشد، آنگاه $f(۱_R) = ۱_S$.

۴) اگر R یک حوزه صحیح باشد، آنگاه $f(۱_R) = ۱_S$.

۹۵- کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر R و S دو حلقه از مشخصه‌های به‌ترتیب m و n باشند، آنگاه مشخصهٔ حلقهٔ $R \times S$ برابر با mn است.

۲) مشخصهٔ یک زیرحلقه، با مشخصهٔ خودحلقه برابر است.

۳) مشخصهٔ هر حلقهٔ نامتناهی، صفر است.

۴) هیچ‌کدام

۹۶- فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و I ایده‌الی ناصفر از آن باشد. در این‌صورت کدام گزینه صحیح است؟ ($U(R)$ مجموعهٔ اعضای وارون‌پذیر R است.)

۱) اگر $U(R) \subseteq R - I$، آنگاه I یک ایده‌ال ماکسیمال است.

۲) اگر I یک ایده‌آل ماکسیمال باشد، آنگاه $R - I \subseteq U(R)$.

۳) اگر $R - I \subseteq U(R)$، آنگاه I یک ایده‌ال ماکسیمال است.

۴) اگر I یک ایده‌ال ماکسیمال باشد، آنگاه $R - I \not\subseteq U(R)$.

۹۷- فرض کنید G زیرگروهی نابدیهی از S_n باشد، به‌طوری‌که هر عضو نابدیهی G یک جایگشت فرد باشد. در این‌صورت $|G|$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۹۸- اگر $f = (۹\ ۶\ ۳\ ۵\ ۱\ ۴)(۲\ ۳\ ۴\ ۵\ ۷\ ۸)$ و $g = (۴\ ۶\ ۷\ ۳\ ۱)(۱\ ۴\ ۲\ ۶\ ۵\ ۷\ ۸)$ و $h = (۱\ ۳\ ۵\ ۲)(۲\ ۳\ ۶\ ۷)$ اعضایی از گروه متقارن $S_۹$ باشند، آنگاه مرتبهٔ عضو $g^{-۲} h^{-۲} f h^{۲} g^{۲}$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۱۲

۴) ۲۴

۹۹- فرض کنید G یک گروه از مرتبهٔ ۱۰۰ باشد، به‌طوری‌که دارای یک زیرگروه مانند H از مرتبهٔ ۲۵ است. اگر $a \in G$ عضوی از مرتبهٔ ۵ باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $|\langle a \rangle H| = ۵۰$

۲) $a \in H$

۳) $G \cong H \times \langle a^۲ \rangle$

۴) $\langle a \rangle H = G$

۱۰۰- فرض کنید $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{۰\}$ گروه ضربی میدان اعداد مختلط باشد و $H \leq \mathbb{C}^*$ یک زیرگروه آن باشد. دراین‌صورت کدام گزینه، یک شرط لازم و کافی برای متناهی بودن اندیس H در $\mathbb{C}^*$ است؟

۱) $H = \mathbb{C}^*$

۲) $H = \{۱\}$

۳) $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$

۴) $H = \mathbb{R}^*$

۱۰۱- تعداد اعداد ۱۰ رقمی با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴ به‌طوری‌که مجموع هر یک از آن‌ها زوج باشد، چند است؟

۱) $۲^{۱۹}$

۲) کمتر از $۲^{۱۹} - ۱$

۳) $۲^{۱۹} - ۱$ یا $۲^{۱۹} + ۱$

۴) بیشتر از $۲^{۱۹} + ۱$

۱۰۲- کدام گزاره یا گزاره‌ها درست است؟

(الف) $\sum_{k=۰}^{۷۰۰} \binom{۱۴۰۱}{۲k} = \sum_{k=۰}^{۷۰۰} \binom{۱۴۰۱}{۲k+۱}$

(ب) $\sum_{k=۰}^{۱۰۱۱} \binom{۲۰۲۲}{۲k} = \sum_{k=۰}^{۱۰۱۱} \binom{۲۰۲۲}{۲k+۱}$

۱) (الف) ۲) (ب)

۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

۱۰۳- یک میز دایره‌ای در حال چرخش داریم. به چند طریق می‌توان ارقام ۰ الی ۹ را دور آن چید؛ به‌طوری‌که مجموع هر دو رقم مجاور، فرد باشد؟ (حالاتی که قرینه آینه‌ای هم هستند، حالات متمایزی محسوب می‌شوند.)

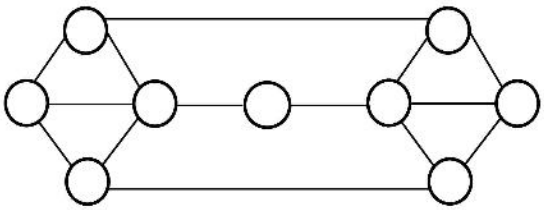
۱) $(۵!)^۲$

۲) $\frac{(۵!)^۲}{۵}$

۳) $۲(۵!)^۲$

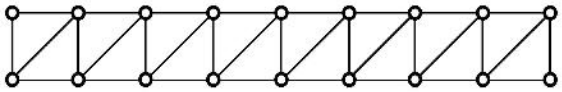
۴) $\frac{(۵!)^۲}{۱۰}$

۱۰۴- به چند طریق می‌توان رأس‌های گراف زیر را با ۳ رنگ قرمز، زرد و آبی رنگ کرد به‌طوری‌که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند؟



۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۳۶

۱۰۵- منظور از یک تطابق کامل در یک گراف G، زیرمجموعه‌ای مانند M از یال‌های G است به‌طوری‌که هر رأس به دقیقاً یک یال از M متصل باشد. گراف زیر دارای چند تطابق کامل است؟



۱) ۳۲
۲) ۳۴
۳) ۴۵
۴) ۵۵

۱۰۶- فرض کنیم $f(x)$ تابع مولد نمایی دنباله $\ldots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ باشد. در این‌صورت $f(2)$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $[0, 2)$
۲) $[2, 4)$
۳) $[4, 6)$
۴) $[6, +\infty)$

۱۰۷- معادله $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 38 \\ 0 \le x_i \le 19 \quad 1 \le i \le 3 \end{cases}$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۱۵۳
۲) ۲۱۰
۳) ۲۶۸
۴) ۵۹۰

۱۰۸- ضریب x^{12} در تابع $\frac{1}{(1-4x)^3}$ چقدر است؟

۱) 91×4^{12}
۲) 455×4^{12}
۳) -91×4^{12}
۴) -455×4^{12}

۱۰۹- به چند روش می‌توان هشت کتاب مختلف را در شش جعبه کاملاً مشابه بسته‌بندی کرد به‌طوری‌که در هر جعبه حداقل یک کتاب باشد؟

۱) ۱۲۷
۲) ۳۰۱
۳) $21 \times 8!$
۴) ۲۶۶

۱۱۰- فرض کنیم G یک گراف ساده باشد که رأس‌های آن هر یک از خانه‌های صفحه شطرنجی ۸×۸ است و دو خانه (دو رأس) با یکدیگر با یک یال متصل می‌شوند اگر و فقط اگر از یکی بتوان با یک حرکت مهره اسب به دیگری رفت (اسب دو خانه افقی (عمودی) و سپس یک خانه عمودی (افقی) حرکت می‌کند). تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $[۱, ۵۰)$

۲) $[۵۰, ۱۰۰)$

۳) $[۱۰۰, ۱۶۰)$

۴) $[۱۶۰, \infty)$

جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۱۱- فرض کنید $E = I - \alpha uv^T$ یک ماتریس مقدماتی است که در آن، u و v بردارهای n بعدی و α یک اسکالر داده شده است. می‌توان $\|Ex\|_۲$ به‌ازای x، $n\times۱$، را با عملیات اصلی از مرتبهٔ دست‌کم ..... محاسبه کرد.

۱) n

۲) $n^۲$

۳) $n\sqrt{n}$

۴) $\sqrt{n}$

۱۱۲- اگر $\bar{x}$ جواب محاسبه شده برای دستگاه $Ax = b$ در یک دستگاه ممیز شناور با ۱۶ رقم دهدهی برای نمایش اعداد حقیقی، عدد حالت A برابر با $۱۰^۵$ و درایه‌های A و b با ۸ رقم دهدهی دقیق باشند، آنگاه تعداد ارقام قابل اعتماد در $\bar{x}$ به‌عنوان جواب دستگاه تقریباً برابر است با .....

۱) ۱۶

۲) ۸

۳) ۱۱

۴) ۳

۱۱۳- تجزیه چولسکی برای ماتریس معین مثبت $n\times n$ با روش حذف گاوسی .....

۱) نیازمند $O(n^۲)$ عملیات است.

۲) برای پایدار بودن نیازمند محورگزینی است.

۳) پایدار است، زیرا موجب رشد زیاد اعداد تولید شده میانی نمی‌شود.

۴) می‌تواند ناپایدار باشد و اعداد میانی تولید شده رشد چشمگیری داشته باشند.

۱۱۴- ماتریس‌های A و $D = U^TAU$ را در نظر بگیرید. اگر U یک ماتریس متعامد نرمال باشد و x و λ به‌ترتیب بردار و مقدار ویژه ماتریس D باشند، آنگاه بردار ویژه و مقدار ویژه A به‌ترتیب ..... هستند.

۱) Ux و $\frac{۱}{\lambda}$

۲) Ux و λ

۳) x و λ

۴) U^Tx و $\frac{۱}{\lambda}$

۱۱۵- فرض کنید A یک ماتریس ناتکین $n\times n$ است و داریم $A = USV^T$ که در آن، U و V ماتریس‌های متعامد نرمال و S قطری با درایه‌های قطری $S_{ii} = \sqrt{i}$، به‌ازای $i = ۱,\dots,n$ هستند. در این‌صورت، عدد حالت A در فرم اقلیدسی برابر است با .....

۱) $n^۲$

۲) $\sqrt{n}$

۳) $n\sqrt{n}$

۴) n

۱۱۶- تکرار kام روش توانی برای محاسبه یک بردار ویژه ماتریس A را به‌صورت $x^{(k)} = Ax^{(k-۱)}$، $k = ۱,۲,\dots$ ، در نظر بگیرید. اگر داشته باشیم $\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+۱)^T} x^{(k)}}{x^{(k)^T} x^{(k)}} = ۰$ ، آنگاه A ماتریسی ..... است.

۱) ناتکین

۲) معین مثبت

۳) متقارن

۴) قطری

۱۱۷- فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی $n\times n$ است. در این‌صورت، تجزیه مقدار ناتکین A به‌صورت USV^T با ماتریس‌های متعامد نرمال U و V وجود دارد و درایه قطری S_{ii}، به‌ازای $i = ۱,\dots,n$ برابر است با ..... که λ_i مقدار ویژه ماتریس A است.

۱) λ_i

۲) $\sqrt{|\lambda_i|}$

۳) $\lambda_i^۲$

۴) $|\lambda_i|$

۱۱۸- در یک مسئله برنامه ریزی x_j را مقدار خرید کالای jام درنظر بگیرید. اگر قرار باشد که از این کالا خریداری شود، آن‌گاه میزان خرید باید دست‌کم t واحد و دست‌بیش u واحد باشد. قیدهایی که این ویژگی را دارند، کدام است؟

۱) $t \le x_j \le u$.

۲) $y \in \{۰,۱\},\ ty \le x_j \le uy$.

۳) $y \in \{۰,۱\},\ ty \le x_j \le u$.

۴) $y \in \{۰,۱\},\ t \le x_j \le uy$.

۱۱۹- برای مسئله (P) به‌صورت

$$\begin{aligned} \min\ & z = x_۱ + x_۲ - x_۳ \\ \text{s.t.}\ & -x_۱ - x_۲ = -۱ \qquad (P) \\ & x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \end{aligned}$$

و مسئله (D)، دوگان (P)، داریم: .....

۱) (P) و (D) ناشدنی هستند.

۲) (P) بی‌کران و (D) ناشدنی هستند.

۳) (P) و (D) جواب بهینه دارند.

۴) (P) و (D) بی‌کران هستند.

۱۲۰- مسئله اولیه (P) به‌صورت

$$\min z = x_1 - x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 = 1 \qquad (P)$$
$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

را در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. در این‌صورت، .....

۱) (P) و (D) جواب‌های بهینه دارند.

۲) (P) و (D) ناشدنی هستند.

۳) (P) و (D) بی‌کران هستند.

۴) (P) ناشدنی و (D) بی‌کران است.

۱۲۱- مسئله (P) به‌صورت

$$\min z = C^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b \qquad (P)$$
$$x \geq 0$$

را با $C \leq 0$ و $b \geq 0$ درنظر بگیرید. در این‌صورت، .....

۱) (D) بی‌کران نیست.

۲) (D) می‌تواند بی‌کران باشد.

۳) (P) بی‌کران است.

۴) (P) و (D) هر دو جواب بهینه دارند.

۱۲۲- فرض کنید $b \geq 0$. اگر دستگاه $Ax \leq b$ ، $x \geq 0$ ، $C^T x < 0$ جواب نداشته باشد، آن‌گاه دستگاه ..... جواب دارد.

۱) $V \leq 0 , A^T V \geq C$

۲) $V \geq 0 , A^T V \geq C$

۳) $V \geq 0 , A^T V + C \geq 0$

۴) $V \leq 0 , A^T V + C \geq 0$

۱۲۳- مسئله برنامه‌ریزی خطی (P) را به‌صورت

$$\min z = C^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b \qquad (P)$$
$$0 \leq x \leq b$$

با $b \geq 0$ در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. گزینه درست کدام است؟

۱) (D) می‌تواند ناشدنی باشد.

۲) (P) و (D) هر دو جواب‌های بهینه دارند.

۳) (P) و (D) هر دو می‌توانند ناشدنی باشند.

۴) (P) می‌تواند ناشدنی باشد ولی (D) همواره شدنی است.

۱۲۴- اگر دستگاه $Ax \le 0 , C^T x > 0$ جواب نداشته باشد، آن‌گاه دستگاه ..... جواب دارد.

۱) $u \le 0 , A^T u = C$

۲) $A^T u \ge C$

۳) $u \ge 0 , A^T u = C$

۴) $A^T u \le C$

۱۲۵- مسئله (P) با $b \ge 0$ را به‌صورت

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} y_i$$
$$\text{s.t.} \quad Ax + y = b \qquad (P)$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

برای تعیین شدنی‌بودن دستگاه(Q) به‌صورت $Ax = b , x \ge 0$، در نظر بگیرید. اگر در یک جدول سیمپلکس، با جواب شدنی (x , y) برای (P) داشته باشیم $a_i' x = b_i$ به‌ازای a_i' سطر iام A، آن‌گاه .....

۱) (P) می‌تواند بی‌کران باشد.

۲) دستگاه (Q) شدنی و فضای شدنی مربوط بی‌کران است.

۳) y_i را می‌توان از مسئله (P) حذف کرد.

۴) دستگاه (Q) شدنی و فضای شدنی مربوط کران‌دار است.

۱۲۶- فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته باشد و $t_0 , y_0 \in \mathbb{R}$. دو معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$B : \begin{cases} u' = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(t , x(t , y_0)\big) u \\ u(t_0) = 1 \end{cases} \qquad A : \begin{cases} x'(t) = f(t , x) \\ x(t_0) = y \end{cases}$$

اگر $X(t , y)$ جواب معادله A و $U(t , y_0)$ جواب معادله B باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) تابع $X(t , y)$ نسبت به t مشتق‌پذیر است و $U(t_0 , y_0) = \dfrac{\partial X}{\partial t}(t_0 , y_0)$

۲) تابع $X(t , y)$ نسبت به y مشتق‌پذیر است و $U(t , y_0) = \dfrac{\partial X}{\partial y}(t , y_0)$

۳) تابع $X(t , y)$ لزوماً نسبت به y مشتق‌پذیر نیست ولی درصورتی‌که $X(t , y)$ نسبت به y مشتق‌پذیر باشد، $U(t , y_0) = \dfrac{\partial X}{\partial y}(t , y_0)$

۴) تابع $X(t , y)$ لزوماً نسبت به y مشتق‌پذیر نیست ولی درصورتی‌که $X(t , y)$ نسبت به t مشتق‌پذیر باشد، $U(t_0 , y_0) = \dfrac{\partial X}{\partial t}(t_0 , y_0)$

۱۲۷- اگر تابع $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۹ \\ -۳ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\varphi(t)$ یک ماتریس اساسی معادله $X'=AX$ باشد، آنگاه $\det(\varphi(t))$ کدام گزینه است؟

۱) $e^{۵t}-e^{-t}$

۲) $e^{۵t}+e^{t}$

۳) $e^{t}+e^{-t}$

۴) $e^{۵t}$

۱۲۸- کدام گزینه دربارهٔ جواب‌های دستگاه معادلات زیر درست است؟

$$\begin{cases} x_۱' = -۳x_۱ - x_۳ \\ x_۲' = -x_۲ + x_۴ \\ x_۳' = x_۱ - ۳x_۳ \\ x_۴' = -x_۲ - x_۴ \end{cases}$$

۱) به‌ازای هر جواب $X(t)=(x_۱(t),\dots,x_۴(t))$ داریم $\lim_{t\to+\infty} X(t)=۰$

۲) دستگاه حداقل دارای یک جواب تناوبی غیربدیهی است.

۳) دستگاه حداقل دارای یک جواب بی‌کران است.

۴) همهٔ جواب‌های دستگاه تناوبی هستند.

۱۲۹- فرض کنید $f(t)$ یک تابع کران‌دار روی $[۰,\infty)$ بوده و $g(t)$ یک جواب غیربدیهی معادله $y''+f(t)y=۰$ باشد که $\lim_{t\to\infty} g(t)=۰$. کدام گزینه دربارهٔ این معادله درست است؟

۱) معادله یک جواب بی‌کران دارد.

۲) همهٔ جواب‌های معادله در بینهایت به صفر میل می‌کند.

۳) همهٔ جواب‌های معادله کران‌دار هستند ولی حد آنها در بینهایت لزوماً موجود نیست.

۴) به‌ازای هر جواب از معادلهٔ حد آن در بینهایت موجود است ولی لزوماً صفر نیست.

۱۳۰- اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد و $x(t)=\tanh(t)$ جوابی از معادله $x'(t)=f(x(t))$ باشد، آنگاه مقدار تابع f در نقطه $x_۰=۱$ کدام است؟

۱) e

۲) -۱

۳) صفر

۴) ۱

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی۱:

۱۳۱- اگر X یک متغیر تصادفی با تکیه‌گاه $S=\{۲,۷\}$ و امید ریاضی $E[X]=۴$ باشد، واریانس این متغیر برابر کدام است؟

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۰

۱۳۲- تابع چگالی متغیر تصادفی X به‌صورت زیر است. امید ریاضی X کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} cx^{۲} & ۱\le x\le ۲ \\ ۰ & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$$

۱) $\frac{۴۵}{۲۸}$

۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۱۳۳- فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت روی بازه $[-۱,۱]$ است. قرار دهید $Y=\frac{۱}{X^{۲}}$. تابع چگالی احتمال Y کدام است؟

۱) $$f(y)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}y^{-\frac{۳}{۲}} & y\ge ۱ \\ ۰ & y<۱ \end{cases}$$

۲) $$f(y)=\begin{cases} \frac{۳}{۲}y^{-\frac{۵}{۲}} & y\ge ۱ \\ ۰ & y<۱ \end{cases}$$

۳) $$f(y)=\begin{cases} ۲y^{-۳} & y\ge ۱ \\ ۰ & y<۱ \end{cases}$$

۴) $$f(y)=\begin{cases} y^{-۲} & y\ge ۱ \\ ۰ & y<۱ \end{cases}$$

۱۳۴- اگر برای متغیر تصادفی X داشته باشیم $E(t^{X})=(۳-۲t)^{-۱}$، مقدار $P(X=۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$

۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۳۵- فرض کنید طول عمر یک لپ‌تاپ متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین ۱۰ سال است. اگر فردی این لپ‌تاپ را ۷ سال پیش خریده باشد احتمال اینکه لپ‌تاپ او ۵ سال دیگر نیز کار کند، چقدر است؟

۱) $e^{-0/7}$

۲) $e^{-1/2}$

۳) e^{-1}

۴) $e^{-0/5}$

۱۳۶- فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<1 \\ \frac{2}{3} & 1\le x<2 \end{cases}$$

مقدار $P\left\{\sqrt{1/5X}>X\right\}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{3}{4}$

۱۳۷- فرض کنید $F(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X باشد. مقدار

$$\frac{EF(X)}{\sqrt{Var(F(X))}}$$

کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$

۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۱۳۸- در تابع چگالی زیر مقدار a کدام است؟

$$f(x,y)=ax^3 \quad ; \quad 0<x<y<1$$

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۱۰

۴) ۲۰

۱۳۹- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند. فرض کنید

$$f_X(x)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\ ,\ x>0\ ,\ f_Y(y)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\ ,\ y>0$$

$P(X<Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$

۳) $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

۴) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

۱۴۰- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0\ ,\ y>0 \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

تابع چگالی احتمال توأم $U=X-Y$ و $Z=X+Y$ کدام است؟

۱) $f(u,z)=\frac{1}{2}e^{-z}\ ,\ |u|>z$

۲) $f(u,z)=e^{-z}\ ,\ z>-u$

۳) $f(u,z)=e^{-z}\ ,\ -z<u<z$

۴) $f(u,z)=\frac{1}{2}e^{-z}\ ,\ -z<u<z$

۱۴۱- فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و هم توزیع با توزیع مشترک پواسون با میانگین یک باشد. اگر

$$Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}$$

و دنبالهٔ $\{Y_n\}$ در توزیع به متغیر تصادفی Y همگرا باشد، آنگاه توزیع Y کدام است؟

۱) نرمال استاندارد

۲) پواسون با میانگین یک

۳) $\frac{1}{2}I(Y=-1,1)$

۴) یکنواخت $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

۱۴۲- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند. تحت کدام‌یک از شرایط زیر $X+Y$ و $X-Y$ ناهمبسته هستند؟

۱) X و Y ناهمبسته باشند.

۲) $Var(X)=Var(Y)$

۳) X و Y دارای توزیع پیوسته باشند.

۴) توزیع هر یک از متغیرهای تصادفی X و Y متقارن باشند.

۱۴۳- فرض کنید $X \sim U(0,1)$ و $N \mid X \sim Pois(2)$، مقدار $E(X^N)$ کدام است؟

۱) $1-e^{-2}$

۲) $\frac{e^2-1}{2}$

۳) $\frac{1-e^{-2}}{2}$

۴) e^2-1

۱۴۴- فرض کنید W_1، W_2 و W_3 متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک یکنواخت روی بازهٔ $(0,1)$ باشند. اگر $Y = W_1 - 3W_2 + 2W_3$، آنگاه یک کران بالا برای $P(|Y| \geq 2)$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{9}{24}$

۳) $\frac{7}{24}$

۴) $\frac{5}{24}$

۱۴۵- فرض کنید $\{X_n : n = 0,1,\ldots\}$ یک زنجیر مارکوف با فضای وضعیت (فضای حالت) S باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر S متناهی باشد، دست کم یک وضعیت (حالت) بازگشتی است.

۲) اگر S نامتناهی باشد، دست کم یک وضعیت (حالت) بازگشتی است.

۳) اگر S متناهی باشد، همه‌ی وضعیت‌ها (حالت) بازگشتی هستند.

۴) اگر S نامتناهی باشد، همه‌ی وضعیت‌ها (حالت) بازگشتی هستند.

۱۴۶- وضعیت j در یک زنجیر مارکوف را بازگشتی گویند، هرگاه:

۱) $P_{j,j} > 0$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} P_{j,j}^{(n)} < \infty$

۳) $f_{j,j} < 1$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} P_{j,j}^{(n)} = \infty$

۱۴۷- در زنجیر مارکوف قدم زدن تصادفی ساده متقارن، مقدار احتمال $P\{X_8 = 1 \mid X_0 = 1\}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{35}{128}$

۳) $\frac{93}{128}$

۴) ۱

۱۴۸- فرض کنید $\{N_1(t): t \geq 0\}$ و $\{N_2(t): t \geq 0\}$ فرایندهای پواسون همگن مستقلی با نرخ‌های λ_1 و λ_2 باشند. برای هر $t > 0$ مقدار احتمال $P\{N_1(t) = 1 | N_1(t) + N_2(t) = 2\}$ چقدر است؟

۱) $\frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$

۲) $\frac{2\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$

۳) $\frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$

۴) $\frac{2\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$

۱۴۹- در یک فرایند شاخه‌ای، فرض کنید X_n اندازه جمعیت در نسل n ام و μ میانگین افراد تولید شده توسط یک عضو در این جمعیت باشد و قرار دهید $X_0 = 1$. در این صورت $E(X_n)$ برابر است با:

۱) μ^n

۲) $\mu^{n-1}(\mu^n - 1)$

۳) μ^{n-1}

۴) $\mu^n(\mu^{n-1} - 1)$

۱۵۰- زنجیر مارکوف با ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

دسته‌های هم ارزی کدام است؟

۱) $\{0,1,2\}, \{3\}$

۲) $\{0,2\}, \{1,3\}$

۳) $\{0,1\}, \{2,3\}$

۴) $\{0,1,2,3\}$