

کد کنترل

166

A



166A

صبح جمعه

۱۴۰۲/۱۲/۰۴



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«در زمینه مسائل علمی، باید دنبال قله بود.»
مقام معظم رهبری

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۴۰۳

آمار (کد ۱۲۰۷)

مدت زمان پاسخگویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۰۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۲۵	۱	۲۵
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۲و۱)، مبنای ماتریس‌ها و جبر خطی، مبنای آنالیز ریاضی و مبنای احتمال)	۲۵	۲۶	۵۰
۳	دروس تخصصی ۱ (احتمال (۲و۱)، آمار ریاضی (۲و۱))	۳۳	۵۱	۸۳
۴	دروس تخصصی ۲ (نمونه‌گیری (۲و۱)، رگرسیون (۱))	۲۳	۸۳	۱۰۵

این آزمون، نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره
 سندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤال‌ها، نوع و
 کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤال‌ها و پایین پاسخنامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- **But at this point, it's pretty hard to hurt my I've heard it all, and I'm still here.**
 1) characterization 2) feelings
 3) sentimentality 4) pain
- 2- **Be sure your child wears sunscreen whenever she's to the sun.**
 1) demonstrated 2) confronted 3) invulnerable 4) exposed
- 3- **Many of these popular best-sellers will soon become dated and, and will eventually go out of print.**
 1) irrelevant 2) permanent 3) fascinating 4) paramount
- 4- **The men who arrived in the of criminals were actually undercover police officers.**
 1) uniform 2) job 3) guise 4) distance
- 5- **It was more to take my meals in bed, where all I had to do was push away my tray with its uneaten food and fall back upon my pillows.**
 1) haphazard 2) reckless 3) convenient 4) vigorous
- 6- **His victory sparked a rare wave of in his home country. Nicaraguans poured into the streets, honking car-horns and waving the national flag.**
 1) serendipity 2) tranquility 3) aspersion 4) euphoria
- 7- **He liked the ease and glitter of the life, and the luster on him by being a member of this group of rich and conspicuous people.**
 1) conferred 2) equivocated 3) attained 4) fabricated

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Roman education had its first "primary schools" in the 3rd century BCE, but they were not compulsory (8) entirely on tuition fees. There were no official schools in Rome, nor were there buildings used specifically for the

purpose. Wealthy families (9) private tutors to teach their children at home, while less well-off children were taught in groups. Teaching conditions for teachers could differ greatly. Tutors who taught in a wealthy family did so in comfort and with facilities; (10) been brought to Rome as slaves, and they may have been highly educated.

- 8- 1) which depending 2) and depended
 3) for depended 4) that depended
- 9- 1) have employed 2) employed
 3) were employed 4) employing
- 10- 1) some of these tutors could have 2) because of these tutors who have
 3) that some of them could have 4) some of they should have

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

The modern mathematics of chance is usually dated to a correspondence between the French mathematicians Pierre de Fermat and Blaise Pascal in 1654. Their inspiration came from a problem about games of chance, proposed by a remarkably philosophical gambler, the chevalier de Méré. De Méré inquired about the proper division of the stakes when a game of chance is interrupted. Suppose two players, A and B, are playing a three-point game, each having wagered 32 pistoles, and are interrupted after A has two points and B has one. How much should each receive?

Fermat and Pascal proposed somewhat different solutions, though they agreed about the numerical answer. Each undertook to define a set of equal or symmetrical cases, then to answer the problem by comparing the number for A with that for B. Fermat, however, gave his answer in terms of the chances, or probabilities. He reasoned that two more games would suffice in any case to determine a victory. There are four possible outcomes, each equally likely in a fair game of chance. A might win twice, AA; or first A then B might win; or B then A; or BB. Of these four sequences, only the last would result in a victory for B. Thus, the odds for A are 3:1, implying a distribution of 48 pistoles for A and 16 pistoles for B. Pascal thought Fermat's solution unwieldy, and he proposed to solve the problem not in terms of chances but in terms of the quantity now called "expectation."

- 11- The word "correspondence" in paragraph 1 is closest in meaning to
- 1) connection
 2) mutual cooperation
 3) coordination by face-to-face interaction
 4) communication by exchanging letters
- 12- The word "their" in paragraph 1 refers to
- 1) games of chance 2) Fermat and Pascal
 3) modern mathematics 4) mathematics of chance

- 23- According to the passage, which of the following statements is true?
 1) Statistics is a tripartite concept of which methodology of statistics is a part.
 2) In parametric formulations, $F(x)$ is assumed to be continuous.
 3) In nonparametric formulations, $F(x)$ belongs to a certain parametric family.
 4) Applied mathematical statistics deals with the mathematical properties of statistical structures.
- 24- Which of the following terms best describes the author's tone in the passage?
 1) Objective 2) Passionate 3) Disapproving 4) Ironic
- 25- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?
 I. Which one is more frequently used: applied mathematical statistics or analytic statistics?
 II. What is the author's intention in discussing the relations between mathematics and statistics?
 III. Who first recognized the difference between parametric and nonparametric formulations?
 1) Only I 2) Only II 3) Only III 4) II and III

دروس پایه (ریاضی عمومی (۲و۱)، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی و مبانی احتمال):

۲۶- فرض کنید بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}$ یکه باشند و $\vec{a} \neq \vec{b}$. طول بردار $\vec{a} - \vec{b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) ۱
 (۳) $\sqrt{2}$
 (۴) $\sqrt{3}$

۲۷- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. کدام مورد برای تابع f درست است؟

- (۱) $f'(0)$ وجود ندارد.
 (۲) تابع f روی بازه‌های شامل صفر صعودی است.
 (۳) تابع f روی بازه‌های شامل صفر نزولی است.
 (۴) تابع f روی بازه‌های شامل صفر نه صعودی و نه نزولی است.

۲۸- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ و به‌ازای هر دو عدد حقیقی x و y تساوی $f(x+y) = f(x) - f(y) + xy(x+y)$

برقرار باشد. مقدار $\sum_{k=1}^{17} f'(k)$ کدام است؟

- (۱) ۱۳۸۹
 (۲) ۱۳۹۰
 (۳) ۱۳۹۱
 (۴) ۱۳۹۳

۲۹- مساحت ناحیه درون منحنی بسته $(a, b > 0)$ $\begin{cases} x = a \cos t, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = b \sin t \cos^2 t \end{cases}$ ، کدام مضرب πab است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۳۰- اگر $\int_1^{\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$ همگرا به عدد A باشد، آنگاه مقدار nA کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{16}$

(۲) $\frac{8}{9} \ln \frac{7}{16}$

(۳) $\frac{9}{8} \ln \frac{7}{16}$

(۴) $2 \ln \frac{7}{16}$

۳۱- برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{n \sqrt{x}}{1+x^2} dx$ ، کدام مورد درست است؟

(۱) جملات سری صعودی و سری همگرا است.

(۲) جملات سری نزولی و سری همگرا است.

(۳) جملات سری صعودی و سری واگرا است.

(۴) جملات سری نزولی و سری واگرا است.

۳۲- مجموعه‌های A_1 ، A_2 و A_3 و تابع f به شرح زیر مفروض‌اند. کدام مورد درست نیست؟ (\mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا است.)

$$A_1 = \left\{ \left(x, \frac{1}{2} \right) : x \in \mathbb{Q} \right\}, A_2 = \left\{ \left(x, \frac{1}{2} \right) : x \notin \mathbb{Q} \right\}, A_3 = \left\{ (x, 2) : x \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2y & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(۱) f در A_3 ناپیوسته است.

(۲) f در A_1^c ناپیوسته است.

(۳) f در A_1 پیوسته است.

(۴) f در A_2 پیوسته است.

۳۳- اگر توابع دو متغیره f و g روی مجموعه همبند و باز S در صفحه مختصات به‌طور پیوسته دیفرانسیل پذیر باشند و C هر منحنی بسته ساده و پاره‌همواری در S باشد، کدام مورد درست نیست؟

$$\oint_C (f \bar{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = \oint_C (g \bar{\nabla} g) \cdot d\vec{r} \quad (۲) \quad \oint_C (f \bar{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = -\oint_C (g \bar{\nabla} g) \cdot d\vec{r} \quad (۱)$$

$$\oint_C (f \bar{\nabla} g) \cdot d\vec{r} = \oint_C (g \bar{\nabla} f) \cdot d\vec{r} \quad (۴) \quad \oint_C (f \bar{\nabla} g) \cdot d\vec{r} = -\oint_C (g \bar{\nabla} f) \cdot d\vec{r} \quad (۳)$$

۳۴- شار گذرندهٔ بیرونی میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + z^2, yz^2 + x^2, zx^2 + y^2)$ از سطح نیم کره $S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{13\pi}{20}$

(۲) $\frac{3\pi}{5}$

(۳) $\frac{\pi}{5}$

(۴) $\frac{3\pi}{20}$

۳۵- مقدار $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + (\min\{x, y\})^2} dx dy$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2} - 2 \ln 2$

(۲) $\ln 2$

(۳) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$

(۴) $2 \ln 2$

۳۶- فرض کنید A و B دو ماتریس 1402×1401 روی \mathbb{C} باشند که هم‌ارز سطری هستند. چنانچه a و b دو بردار ستونی از سایز 1402 روی \mathbb{C} باشند که $Aa = 0$ و $Bb = 0$ ، در این صورت کدام مورد درست است؟

(۱) $a = b$

(۲) $a, b = 0$

(۳) $Ab = 0$ و $Ba = 0$

(۴) $Ab \neq 0$ و $Ba = 0$

۳۷- فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک عملگر خطی با ضابطه $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ باشد. در این صورت مقادیر ویژه T ، کدام است؟

(۱) 2 و -3

(۲) -2 و -3

(۳) 2 و 3

(۴) -2 و 3

۳۸- فرض کنید $T: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ با ضابطه $T(f)(x) = 2f'(x) + \int_0^x 3f(t) dt$ باشد که در آن $P_n(\mathbb{R})$

فضای برداری چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر n روی میدان \mathbb{R} است. کدام مورد درست است؟

(۱) $\dim \ker T = 2$ و $\text{rank}(T) = 2$

(۲) $\ker T = \{0\}$ ، T پوشا نیست و $\text{rank}(T) = 3$

(۳) T یک‌به‌یک، پوشا است و $\text{rank}(T) = 3$

(۴) T یک‌به‌یک، پوشا است و $\text{rank}(T) = 4$

۳۹- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $A^3 = A$. اگر A دارای ۳ مقدار ویژه متمایز باشد، آن‌گاه رتبه A برابر است با:

(۱) $\text{tr}(A)$

(۲) $\text{tr}(A^2)$

(۳) صفر

(۴) $\text{tr}(A^3)$

۴۰- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. در این صورت A به عنوان یک تبدیل خطی در \mathbb{R}^5 :

(۱) مثلثی شونده و قطری شدنی است.

(۲) مثلثی شونده است ولی قطری شدنی نیست.

(۳) مثلثی شونده نیست و قطری شدنی نیست.

(۴) مثلثی شونده نیست ولی قطری شدنی است.

۴۱- به ازای ثابت a ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax) - a \tan(x)}{\sin(ax) - a \sin(x)}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) a

(۳) -2

(۴) $-a$

۴۲- فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و g بر $[0, 1]$ با ضابطه $g(x) = \sup\{f(t) : 0 \leq t \leq x\}$ تعریف شود. کدام مورد درست است؟

(۱) g بر $[0, 1]$ پیوسته است.

(۲) g بر $(0, 1)$ پیوسته است، ولی ممکن است در 0 و 1 پیوسته نباشد.

(۳) برای $r \in \mathbb{R}$ مجموعه $\{x : g(x) < r\}$ باز است، ولی g لزوماً پیوسته نیست.

(۴) برای $r \in \mathbb{R}$ مجموعه $\{x : g(x) > r\}$ باز است، ولی g لزوماً پیوسته نیست.

۴۳- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد به طوری که برای $C > 0$ و هر $x, y \in \mathbb{R}$ نامساوی زیر برقرار است:

$$|f(x) - f(y)| \geq C|x - y|$$

کدام مورد نادرست است؟

(۱) f اکیداً یکنواست.

(۲) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک همسان ریختی است.

(۳) $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

(۴) برد f در \mathbb{R} بسته است، ولی f لزوماً پوشا نیست.

۴۴- فرض کنید تابع حقیقی f بر $(0, 2)$ پیوسته و بر $\{1\} \cup (0, 2)$ مشتق پذیر باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = a$ ، آنگاه

کدام مورد درست است؟

(۱) مشتق f در نقطه $x = 1$ ، لزوماً موجود نیست.

(۲) مشتق f در نقطه $x = 1$ موجود و برابر a است.

(۳) اگر f' یکنوا باشد، مشتق f در نقطه $x = 1$ موجود و برابر با a است و شرط یکنوایی ضروری است.

(۴) مشتق f در نقطه $x = 1$ موجود است و اگر تابع f' پیوسته باشد، آنگاه $f'(1) = a$ و شرط پیوستگی ضروری است.

۴۵- فرض کنید برای هر n ، $a_n > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. کدام سری، واگرا است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \quad (۲)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \quad p > 1 \quad (۱)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n) \quad (۴)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (۳)$$

۴۶- برای داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n با میانۀ \bar{x} ، براساس ویژگی‌های میانۀ، کدام مورد درست است؟

(۱) مقدار تابع $f(a) = \sum_{i=1}^n |x_i - a|$ وقتی ماکزیمم می‌شود که $a = \bar{x}$ باشد.

(۲) مقدار تابع $f(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ وقتی مینیمم می‌شود که $a = \bar{x}$ باشد.

(۳) مقدار تابع $f(a) = \sum_{i=1}^n |x_i - a|$ وقتی مینیمم می‌شود که $a = \bar{x}$ باشد.

(۴) اگر میانۀ یکتا نباشد، تابع $f(a) = \sum_{i=1}^n |x_i - a|$ دارای مینیمم یکتا نیست.

۴۷- میانگین و انحراف معیار درجه خلوص ماده شیمیایی A به ترتیب ۷۵ و ۵ درصد و برای ماده شیمیایی B میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۸۵ و ۱۰ درصد است. در مورد درجه خلوص این دو ماده، چه اظهارنظری می‌توان نمود؟

(۱) ماده A، خالص‌تر است.

(۲) ماده B، خالص‌تر است.

(۳) دو ماده از نظر درجه خلوص، به‌طور متوسط یکسان هستند.

(۴) نمی‌توان درجه خلوص دو ماده را مقایسه نمود.

۴۸- یک عکس خانوادگی را در نظر بگیرید که در آن، قرار است مادر بزرگ در وسط یک ردیف از اعضای خانواده باشد. برای یک خانواده ۷ نفری (شامل مادر بزرگ)، چند روش مختلف برای قرار گرفتن اعضای خانواده در این عکس وجود دارد؟

(۱) ۳۶۰

(۲) ۷۲۰

(۳) ۲۵۲۰

(۴) ۵۰۴۰

۴۹- براساس یک نظرسنجی، پاسخ‌دهندگان دارای حداقل یکی از بیمه‌های خدمات درمانی یا بیمه درآمد از کارافتادگی هستند. اگر x درصد از پاسخ‌دهندگان دارای بیمه خدماتی درمانی، y درصد دارای بیمه درآمد از کارافتادگی و z درصد فقط دارای بیمه خدمات درمانی باشند، احتمال اینکه پاسخ‌دهنده‌ای که به‌طور تصادفی انتخاب شده، فقط دارای بیمه از کارافتادگی باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{y - x - 2z}{100}$

(۲) $\frac{y - x + 2z}{100}$

(۳) $\frac{y - x - z}{100}$

(۴) $\frac{y - x + z}{100}$

۵۰- طبق یافته‌های ژنتیکی به دست آمده، دوقلوها را می‌توان به دو گروه تقسیم‌بندی نمود: هموزیگوت یا هتروزیگوت. در گروه هموزیگوت، دو جنین تشکیل خواهد شد که ژن‌های کاملاً مشابهی با یکدیگر دارند و در نتیجه، همیشه هم‌جنس هستند (هر دو پسر یا هر دو دختر). اگر در یک جامعه از دوقلوها، درصد دوقلوهای دختر $\frac{1}{4}$ باشد،

درصد دوقلوهای هموزیگوت کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{4}$

دروس تخصصی ۱ (احتمال (۲۱)، آمار ریاضی (۲۰)):

۵۱- طول بدن ماهی‌های یک دریاچه، متغیر تصادفی X (برحسب سانتی‌متر) با تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{30}$, $5 < x < 25$ است. ماهی‌گیری ۳ ماهی صید کرده است. احتمال این‌که طول بزرگ‌ترین آنها از ۱۰ سانتی‌متر کمتر باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{64}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{8}$

(۴) $\frac{1}{16}$

۵۲- فرض کنید $X \sim N(2, 4)$, $Y \sim N(0, 9)$ و $W \sim N(15, 16)$ باشند. کدام مورد، درست است؟

(۱) $P(Y \leq -2) \leq P(W \leq 12) \leq P(X \leq 1)$

(۲) $P(W \leq 12) \leq P(Y \leq -2) \leq P(X \leq 1)$

(۳) $P(X \leq 1) \leq P(W \leq 12) \leq P(Y \leq -2)$

(۴) $P(X \leq 1) \leq P(Y \leq -2) \leq P(W \leq 12)$

۵۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسون با تابع توزیع تجمعی F باشد، به طوری‌که $F(2) = 2/6F(1)$. در این صورت،

$E(X)$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) $3/2$

(۳) ۴

(۴) $4/2$

۵۴- اگر X دارای تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ، $x \in \mathbb{R}$ و $F(x)$ تابع توزیع آن باشند، واریانس متغیر

تصادفی $Y = (1 - F(X))^2$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{12}{45}$

(۲) $\frac{5}{45}$

(۳) $\frac{4}{45}$

(۴) وجود ندارد.

۵۵- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل هندسی با تابع جرم احتمال زیر باشند:

$$P(X=x) = p(1-p)^x, \quad x=0,1,2,\dots$$

مقدار $\{P\{X=Y \text{ و } \text{Min}(X,Y)=1\}$ ، کدام است؟

(۱) $p(1-p)$

(۲) $p^2(1-p)$

(۳) $p(1-p)^2$

(۴) $p^2(1-p)^2$

۵۶- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند که $X \sim U(0,1)$ و $Y \sim U(0,\beta)$ اگر $P(X>Y) = \frac{1}{4}$

باشد، مقدار β ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۴

۵۷- فرض کنید X دارای توزیع پواسون با میانگین ۲ و Z دارای توزیع نرمال استاندارد، دو متغیر تصادفی مستقل

از یکدیگر باشند. در مورد کران $P(Z^2 > \frac{X+10}{X+Z^2})$ ، چه می‌توان گفت؟

(۱) حداقل $\frac{3}{10}$

(۲) حداکثر $\frac{3}{10}$

(۳) حداقل $\frac{7}{10}$

(۴) حداکثر $\frac{7}{10}$

۵۸- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی بواسون مستقل با میانگین برابر با λ باشند. مقدار احتمال $P(X=0 | X+Y=2)$ ، کدام است؟

$$2e^{-\lambda} \quad (۲) \quad \frac{e^{-\lambda}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۴) \quad \frac{1}{2} \quad (۳)$$

۵۹- برای دو متغیر تصادفی X و Y داریم:

$$M_{X+2Y}(t) = (1-2t)^{-1}, \quad M_{2X-Y}(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

که در آن، $M_Z(t)$ نشان دهنده تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی Z است. با فرض این که $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$ ، در این صورت $\text{Cov}(X, Y)$ ، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

۶۰- فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی توأم $f(x, y) = e^{-2x-\frac{y}{2}}$ $x > 0, y > 0$ باشد. ضریب همبستگی بین $X+Y$ و $X-Y$ ، کدام است؟

$$-\frac{14}{17} \quad (۱)$$

$$-\frac{15}{17} \quad (۲)$$

$$-\frac{16}{17} \quad (۳)$$

$$-\frac{13}{17} \quad (۴)$$

۶۱- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی سه تایی از توزیعی با تابع مولد گشتاور $M(t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2}$

باشد. واریانس $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ ، چقدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۴)$$

۶۲- در یک نمونه تصادفی ۵ تایی از توزیع گاما با پارامترهای ۱ و ۱، احتمال این که کوچک‌ترین مشاهده از میانه توزیع بزرگ‌تر باشد، کدام است؟

$$\frac{7}{32} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{32} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{32} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{32} \quad (۴)$$

۶۳- اگر X_1, X_2, X_3 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع $N(\frac{1}{2}, 2)$ باشند،

$$E\left(\frac{X_1^2 + 2X_2^2 - 3X_3^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}\right) \text{، کدام است؟}$$

$$(۱) \text{ صفر}$$

$$(۲) ۲$$

$$(۳) ۱$$

$$(۴) \frac{1}{2}$$

۶۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع توزیع پیوسته F باشد. همچنین فرض کنید Y یک متغیر تصادفی دیگر از همان توزیع F و مستقل از X_i ها باشد. حاصل $P(Y > X_{(1)})$ ، کدام است؟ $X_{(1)}$ کوچک‌ترین آماره مرتب یک نمونه تصادفی به حجم n است.

$$(۱) 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(۲) 1 - \frac{1}{n}$$

$$(۳) 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$(۴) 1 - \frac{1}{n+1}$$

۶۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ ، $x > 0$ و

$$Y_i = \frac{n+1}{X_i+1} \text{ باشد. اگر } Y_{(n)} = \max(Y_1, \dots, Y_n) \text{، در این صورت } E(Y_{(n)}) \text{، کدام است؟}$$

$$(۱) n$$

$$(۲) \frac{n+1}{2}$$

$$(۳) n+1$$

$$(۴) ۱$$

۶۶- فرض کنید $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از متغیر تصادفی X با تابع چگالی

$$f(x) = x, \quad 0 < x < \sqrt{2}$$

ترتیبی n ام نمونه تصادفی است)

$$(1) \text{ توزیع نمایی با میانگین } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \text{ توزیع نمایی با میانگین } \sqrt{2}$$

$$(3) \chi^2_{(1)}$$

$$(4) \chi^2_{(2)}$$

۶۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع جرم احتمال زیر باشد. برآورد گشتاوری θ براساس نمونه تصادفی

$$P(X=x) = \frac{2x}{\theta(\theta+1)} I_{\{1,2,\dots,\theta\}}(x)$$

X_1, \dots, X_n کدام است؟

$$(1) \frac{3\bar{X}-1}{2}$$

$$(2) \frac{2\bar{X}+1}{3}$$

$$(3) \frac{2\bar{X}-1}{3}$$

$$(4) \frac{3\bar{X}+1}{2}$$

۶۸- از کیسه‌ای شامل N مهره، ۱۵ مهره استخراج می‌کنیم. سپس آنها را علامت گذاری کرده و به کیسه برمی‌گردانیم.

مجدداً ۱۰ مهره را به تصادف و با جایگذاری انتخاب می‌کنیم که از این تعداد، ۵ مهره علامت گذاری شده مشاهده

می‌کنیم. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی N ، کدام است؟

$$(1) 20$$

$$(2) 24$$

$$(3) 30$$

$$(4) 35$$

۶۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع $U(a-b, a+b)$ باشد. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

پارامتر $\theta = (a, b)$ ، کدام است؟

$$(1) \left(\frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}, X_{(n)} \right)$$

$$(2) \left(X_{(1)}, \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{2} \right)$$

$$(3) \left(\frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{2}, \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2} \right)$$

$$(4) \left(\frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}, \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{2} \right)$$

۷۰- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای یکی از توابع احتمال زیر باشد:

	x_1	x_2	x_3
$f_{\theta_1}(x)$	۰/۶	۰/۱	۰/۳
$f_{\theta_2}(x)$	۰/۲	۰/۷	۰/۱
$f_{\theta_3}(x)$	۰/۴	۰/۴	۰/۲

آماره بسنده مینیمال برای θ ، کدام است؟

$$T(x) = \begin{cases} 1 & x = x_1 \\ 2 & x = x_2, x_3 \end{cases} \quad (2)$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & x = x_1, x_2 \\ 2 & x = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

$$T(x) = I_{\{x_1\}}(x) \quad (4)$$

$$T(x) = \begin{cases} 2 & x = x_1, x_2 \\ 1 & x = x_3 \end{cases} \quad (3)$$

۷۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $\mu \in \mathbb{R}$ ، $x \geq \mu$ ، $f_{\mu}(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}(x-\mu)}$ باشد.

مقدار $E(\bar{X} - \frac{1}{4} | X_{(1)})$ ، کدام است؟

$$X_{(1)} + \frac{1}{4n} \quad (1)$$

$$X_{(1)} - \frac{1}{4n} \quad (2)$$

$$X_{(1)} - \frac{4}{n} \quad (3)$$

$$X_{(1)} + \frac{4}{n} \quad (4)$$

۷۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع $U(-\theta, \theta)$ باشد. $E(|X_1| \mid \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|)$ ، کدام است؟

$$\frac{n+1}{2n} |X_{(n)}| \quad (1)$$

$$\frac{|X_{(1)}| + |X_{(n)}|}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\min_{1 \leq i \leq n} |X_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|}{2} \quad (3)$$

$$\frac{n+1}{2n} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \quad (4)$$

۷۳- فرض کنید X ، دارای تابع احتمال زیر باشد:

$$P(X=x) = \frac{(e^\theta - 1)^{-1} \theta^x}{x!}, \quad x=1, 2, \dots, \theta > 0$$

برآورد UMVU برای θ ، کدام است؟

$$U(x) = \begin{cases} 1 & x=1, 2 \\ x^2 & x=3, 4, \dots \end{cases} \quad (1)$$

$$U(x) = \begin{cases} x & x=1, 2 \\ x^2 & x=3, 4, \dots \end{cases} \quad (2)$$

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x=1 \\ x & x=2, 3, \dots \end{cases} \quad (3)$$

$$U(x) = \begin{cases} x & x=1 \\ x^2 & x=2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

۷۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع یواسون با پارامتر λ باشد. UMVUE پارامتر

$$P(X=1) \text{ کدام است؟ } \left(\bar{X} = \frac{T}{n}, T = \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

$$\left(1 - \frac{m}{n}\right)^T T(T-1) \cdots (T-m+1) \quad (1)$$

$$\frac{(n-m)^{T-m}}{n^T} T(T-1) \cdots (T-m+1) \quad (2)$$

$$\left(1 - \frac{m}{n}\right)^T T(T-1) \cdots (T-m) \quad (3)$$

$$\frac{(n-m)^{T-m}}{n^T} T(T-1) \cdots (T-m) \quad (4)$$

۷۵- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل باشند، به گونه‌ای که $X_i \sim P(i\lambda)$ ، $i=1, 2$.

اگر $U = X_1 + X_2$ ، تابع اطلاع فیشر U کدام است؟

$$\frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3}{\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{\lambda}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2}{\lambda} \quad (4)$$

۷۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n ، نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = \frac{x+2}{\theta(\theta+2)} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0$$

برآوردگر نأریب $\gamma(\theta) = \frac{\theta^2 - 2}{\theta + 2}$ که واریانس آن برابر با کران پایین کرامر - راثو است، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}\bar{X} - 1$

(۲) $\bar{X} - 2$

(۳) $\frac{1}{2}\bar{X} + 1$

(۴) $\bar{X} + 2$

۷۷- فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f_{\theta}(x) = \theta x^{\theta-1}$ ، $0 < x < 1$ ، $\theta > 0$ باشد. کوتاه‌ترین

بازه اطمینان برای θ در سطح $100(1-\alpha)\%$ براساس کمیت محوری X^{θ} ، کدام است؟

(۱) $\left(0, \frac{\ln \alpha}{\ln X}\right)$

(۲) $\left(0, \frac{\ln X}{\ln \alpha}\right)$

(۳) $\left(0, \frac{\ln X}{\ln(1-\alpha)}\right)$

(۴) $\left(0, \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln X}\right)$

۷۸- فرض کنید جعبه‌ای ۶ مهره دارد که m تای آن سیاه و بقیه سفید هستند. شخصی می‌خواهد فرض $H_0: m = 5$ در مقابل $H_1: m = 3$ را بیازماید. برای انجام این آزمون، دو مهره با جایگذاری و به تصادف انتخاب می‌کند و اگر

دو مهره سفید باشد، فرض H_0 رد می‌شود. توان آزمون، کدام است؟

(۱) $\frac{10}{36}$

(۲) $\frac{9}{36}$

(۳) $\frac{18}{36}$

(۴) $\frac{25}{36}$

۷۹- دو متغیر تصادفی مستقل X_1, X_2 با توزیع $N(\theta_i, \sigma_i^2)$ ، $i = 1, 2$ ، را در نظر بگیرید. براساس ناحیه بحرانی

$\{(X_1, X_2): \bar{X} > 2X_1\}$ سطح معنی‌داری آزمون فرض: $H_0: \theta_2 = 2\theta_1$ در مقابل $H_1: \theta_2 > 2\theta_1$ ، کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۰/۷۵

(۳) ۰/۵

(۴) ۰/۲۵

۸۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0$$

ناحیه رد آزمون نسبت درست‌نمایی برای فرض $H_0: \theta = 2$ در مقابل $H_1: \theta < 2$ با اندازه α ، کدام است؟

$$(P(\chi_m^2 > \chi_{m, \beta}^2) = \beta)$$

$$\sum_{i=1}^n \log X_i < \chi_{rn, 1-\alpha}^2 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \log X_i > \chi_{rn, \alpha}^2 \quad (1)$$

$$-\sum_{i=1}^n \log X_i < \chi_{rn, 1-\alpha}^2 \quad (4)$$

$$-\sum_{i=1}^n \log X_i > \chi_{rn, \alpha}^2 \quad (3)$$

۸۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با یکی از توابع احتمال زیر باشد:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f_{\theta=0}(x)$	۰/۲	۰/۳	۰/۱	۰/۳	۰/۱
$f_{\theta=1}(x)$	۰/۳	۰/۳	۰/۱	۰/۲	۰/۱
$f_{\theta=2}(x)$	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۳

در آزمون فرض $H_0: \theta = 0$ در مقابل $H_1: \theta \neq 0$ ، آزمون نسبت درست‌نمایی در سطح معنی‌داری ۰/۱۵ کدام است؟

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x = x_5 \\ \frac{1}{2} & x = x_2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x = x_2 \\ \frac{1}{2} & x = x_5 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = x_1, x_5 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (4)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & x = x_1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (3)$$

۸۲- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد.

$$f_{\theta}(x) = 3(1-3^{-\frac{1}{\theta}})^{\frac{x}{\theta}} \quad x = \theta, \theta+1, \dots$$

برای آزمون $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta > 1$ ، پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت (UMPT) با اندازه $\frac{1}{3}$ ، کدام است؟

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 3 \\ \frac{1}{5} & x = 2 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ \frac{1}{5} & x = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 3 \\ 0 & x \leq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (3)$$

دروس تخصصی ۲ (نمونه‌گیری (۱ و ۲)، رگرسیون (۱):

۸۳- شرط کافی برای آنکه یک روش نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده n تایی از جامعه‌ای N عضوی باشد، کدام است؟

(۱) n غیر تصادفی بوده و تعداد نمونه‌ها $\binom{N}{n}$ باشد.

(۲) احتمال شمول هر یک از اعضای جامعه در نمونه برابر باشد.

(۳) همه اعضای جامعه، شانس برابر برای انتخاب داشته باشند.

(۴) همه نمونه‌های ممکن، شانس برابر برای انتخاب داشته باشند.

۸۴- اگر y_1, y_2, \dots, y_n مقادیر صفت y در یک نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری از جامعه

Y_1, Y_2, \dots, Y_N باشد، برای متغیرهای تصادفی $y_i, i = 1, \dots, n$ کدام مورد درست است؟

(۱) هم‌توزیع و مستقل هستند.

(۲) هم‌توزیع و وابسته هستند.

(۳) هم‌توزیع نیستند ولی مستقل هستند.

(۴) نه هم‌توزیع هستند و نه مستقل.

۸۵- در نمونه‌گیری طبقه‌ای وقتی تابع هزینه به صورت خطی $c = c_0 + \sum_{h=1}^L n_h c_h$ باشد، در تخصیص بهینه کدام گزاره درست است؟ (N_h حجم طبقه و S_h انحراف معیار طبقه است.)

(۱) حجم نمونه در طبقه h ام با $\frac{N_h S_h}{\sqrt{c_h}}$ متناسب است.

(۲) حجم نمونه در طبقه h ام با $\frac{N_h^2 S_h^2}{c_h}$ متناسب است.

(۳) حجم نمونه در طبقه h ام با $\frac{N_h + S_h}{c_h}$ متناسب است.

(۴) حجم نمونه در طبقه h ام با $N_h S_h^2 \sqrt{c_h}$ متناسب است.

۸۶- در اداره‌ای با ۵۰۰ کارمند که در ۱۵ شعبه فعالیت می‌کنند، به تصادف ۵ شعبه را انتخاب کرده و میزان

اضافه‌کار ماهانه و تعداد کارکنان این شعب را به شرح زیر به دست آورده‌ایم. برآوردگرهای نسبی سرانه

اضافه‌کار و میانگین اضافه‌کار ماهانه کارکنان هر شعبه این اداره به ترتیب کدام‌اند؟

میزان اضافه‌کار شعبه	۱۱۰	۱۵۰	۱۸۰	۸۰	۲۰۰	(۱) ۴/۸ و ۱۴۴
جمعیت شعبه	۲۵	۳۰	۳۰	۱۵	۵۰	(۲) ۴ و ۱۴۴
						(۳) ۴/۸ و ۱۶۰
						(۴) ۴ و ۱۶۰

۸۷- می‌خواهیم از یک نمونه n تایی جهت برآورد میانگین جامعه‌ای شامل N مقدار y_1, y_2, \dots, y_N استفاده کنیم.

تقرات اول و دوم جامعه تصمیم دارند در صورت انتخاب، به ترتیب ۲ و $\frac{1}{4}$ برابر مقادیر واقعی خود را گزارش کنند.

در این صورت، میانگین معمولی یک نمونه تصادفی ساده برای میانگین جامعه، در کدام صورت ناریب است؟

(۱) $y_1 = y_2$

(۲) $y_2 = 2y_1$

(۳) در هر صورت اریب است.

(۴) هیچ‌یک از دو عنصر اول و دوم در نمونه انتخاب نشوند.

۸۸- در نمونه‌گیری تصادفی ساده با استفاده از اطلاعات کمکی، اگر Y صفت اصلی و X صفت کمکی باشد، در کدام

صورت، برآوردگرهای نسبتی بر برآوردگرهای معمولی برتری دارند؟

(۱) \bar{Y} بزرگ‌تر از \bar{X} باشد.

(۲) خط رگرسیون Y بر X از مبدأ بگذرد و ارتباط خطی معکوس باشد.

(۳) ارتباط خطی قوی بین دو صفت X و Y برقرار باشد.

(۴) خط رگرسیون Y بر X از مبدأ بگذرد و ارتباط خطی مستقیم باشد.

۸۹- اگر اندازه نمونه لازم برای برآورد میانگین جامعه را براساس میزان واریانس این برآورد تعیین کنیم و این

اندازه در نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری و با جایگذاری به ترتیب برابر n و n_0 باشد، آنگاه n

بر حسب n_0 کدام است؟

$$(1) \frac{n_0}{1 - \frac{n_0 - 1}{N}}$$

$$(2) \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N - 1}}$$

$$(3) \frac{n_0}{1 + \frac{n_0 - 1}{N}}$$

$$(4) \frac{n_0}{1 - \frac{n_0}{N}}$$

۹۰- جامعه‌ای بزرگ به دو طبقه با اندازه‌های برابر افزاز شده است. درصد اعضای دارای یک ویژگی در طبقه اول در

فاصله $(0/3, 0/7)$ و در طبقه دوم در فاصله $(0, 0/2)$ قرار دارد. اندازه کل نمونه در تخصیص نیمین برای برآورد

درصد اعضای دارای این ویژگی در جامعه، وقتی ماکسیمم واریانس برآوردگر برابر $0/05$ باشد، کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۴

(۳) ۹

(۴) ۱۵

۹۱- جامعه‌ای با N خوشه M تایی وجود دارد. برای مقایسه دقت نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای وقتی n خوشه

به تصادف انتخاب شوند و نمونه‌گیری تصادفی ساده با حجم برابر nM ، اگر S_b^2 واریانس بین مقادیر کل

(مجموع مقادیر) خوشه‌های جامعه و S^2 واریانس کل جامعه باشد، دقت این دو روش نمونه‌گیری چه موقع

یکسان است؟

$$(1) S_b^2 = MS^2$$

$$(2) S^2 = MS_b^2$$

$$(3) S^2 = nMS_b^2$$

$$(4) S_b^2 = nMS^2$$

۹۲- از جامعه‌ای متشکل از ۱۲ خوشه، به تصادف دو خوشه را انتخاب نموده‌ایم. مقادیر صفت y و فراوانی آنها در جدول زیر مشخص شده‌اند. برآوردی ناریب برای مقدار کل صفت y ، کدام است؟

مقادیر صفت y	۰	۱	۲	(۱) ۱۸۰
خوشه اول نمونه	۵	۲	۳	(۲) ۱۵۰
خوشه دوم نمونه	۱۰	۸	۲	(۳) ۱۲۰
				(۴) ۹۰

۹۳- واریانس برآوردگر میانگین جامعه با استفاده از یک نمونه سیستماتیک (سامانمند) ۲ تایی از جامعه‌ای به حجم ۴ با مقادیر $y_1 = 3, y_2 = 0, y_3 = 4, y_4 = 1$ ، کدام است؟

(۱) ۲
(۲) ۲/۲۵
(۳) ۳/۶
(۴) ۴/۵

۹۴- از جامعه‌ای به حجم ۱۰۰، نمونه‌ای ۱۰ تایی به روش تصادفی ساده بدون جایگذاری انتخاب کرده‌ایم. اگر فاصله اطمینان برای میانگین جامعه به صورت (۱۲، ۱۸) باشد، ضریب تغییرات نمونه کدام است؟ ($z = 2$)

(۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{1}{3}$

۹۵- در مدل رگرسیونی $y_i = \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، اگر $e_i = y_i - \hat{y}_i$ ، e_i ها نشان دهنده باقی مانده‌ها باشند، کدام مورد درست است؟

(۱) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = 0$
(۲) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$
(۳) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i e_i = 0$
(۴) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i = 0$

۹۶- در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ در صورتی که $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ ، آنگاه کدام عبارت درست است؟

(۱) $\hat{\beta}_1 = 0$
(۲) $\hat{\beta}_0 = 0$
(۳) $\text{Var}(\hat{\beta}_0) = \text{Var}(\hat{\beta}_1)$
(۴) $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ ناهمبسته‌اند.

۹۷- در مدل رگرسیونی $y_i = \frac{\beta}{\sqrt{x_i}} + \varepsilon_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، اگر خطاها دارای توزیع نرمال استاندارد باشند،

واریانس برآوردگر کمترین توان‌های دوم β ، کدام است؟

- (۱) میانگین هارمونیک x_i ها
(۲) میانگین هندسی x_i ها
(۳) میانگین حسابی x_i ها
(۴) میانگین توان دوم x_i ها

۹۸- در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ اگر $SST = 8$ و $S_{xx} = 2$ و $R^2 = 0.25$ باشد، آنگاه $\hat{\beta}_1$ کدام است؟

(۱) ۰/۵

(۲) ۱

(۳) ۱/۵

(۴) ۲

۹۹- اگر در برازش مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ برای $i = 1, \dots, n$ یکی از مشاهدات به صورت (\bar{x}, \bar{y}) باشد و آن را از مدل حذف و مدل جدیدی با $n-1$ مشاهده برازش دهیم، کدام مورد زیر تغییر می‌کند؟

(۱) ضریب تعیین R^2

(۲) مجموع مربعات کل SST

(۳) مدل پیش‌بینی $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

(۴) آماره F در آزمون $H_0: \beta_1 = 0$ در مقابل $H_1: \beta_1 \neq 0$

۱۰۰- دو مدل رگرسیونی خطی ساده $y_i = \beta_{01} + \beta_{11} x_{i1} + \varepsilon_i$ و $y_i = \beta_{02} + \beta_{21} x_{i1} + \beta_{22} x_{i2} + \varepsilon_i$ و مدل $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ را در نظر بگیرید. اگر بردار مشاهدات $\bar{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{n1})$ و $\bar{x}_2 = (x_{12}, \dots, x_{n2})$ مستقل باشند، آنگاه کدام عبارت درست است؟

(۱) $\hat{\beta}_2^* = \hat{\beta}_2$ یا $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1$

(۲) $\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_{01} = \hat{\beta}_{02}$

(۳) $\hat{\beta}_2^* = \hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1$

(۴) $\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_{01} = \hat{\beta}_{02}$ و $\hat{\beta}_2^* = \hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1$

۱۰۱- در مدل رگرسیونی $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ که $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ است، برای نمونه تصادفی ۵ تایی مقادیر y_i, \hat{y}_i به صورت زیر به دست آمده است. برآورد نازیب σ^2 ، کدام است؟

y_i	۲	-۲	۳	-۱	-۲
\hat{y}_i	۱	۰	۱	-۱	-۱

(۱) $\frac{10}{4}$

(۲) $\frac{10}{3}$

(۳) ۵

(۴) ۱۰

۱۰۲- در یک مدل رگرسیون چندگانه با ۳ متغیر مستقل x_1, x_2 و x_3 و براساس $n = 10$ نمونه، ضریب تعیین چندگانه تعدیل شده $R_{adj}^2 = 0.7$ ، به دست آمده است. مقدار F در جدول تجزیه واریانس، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{7}{10}$

(۳) $\frac{10}{7}$

(۴) ۸

۱۰۳- اگر مدل ناقص $y_i = \beta_1^* x_{i1} + \varepsilon_i$ را به جای مدل درست $y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ برازش دهیم و $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_1^*$

به ترتیب برآورد ضرایب β_1 و β_1^* باشند، آنگاه $\frac{\text{Var}(\hat{\beta}_1^*)}{\text{Var}(\hat{\beta}_1)}$ کدام است؟

(۱)

$$\frac{(\sum x_{i1} x_{i2})^2}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2} \quad (۲)$$

$$1 - \frac{(\sum x_{i1} x_{i2})^2}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2} \quad (۳)$$

$$1 + \frac{(\sum x_{i1} x_{i2})^2}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2} \quad (۴)$$

۱۰۴- در مدل رگرسیونی $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ اگر

$$\sum x_{i1} x_{i2} = \sum x_{i1} = \sum x_{i2} = 0$$

آنگاه کدام مورد درباره VIF (عامل تورم واریانس) همواره درست است؟

$$\text{VIF}(x_j) = 1, \quad j = 1, 2 \quad (۱)$$

$$\text{VIF}(x_j) > 1, \quad j = 1, 2 \quad (۲)$$

$$\text{VIF}(x_1) + \text{VIF}(x_2) = 1 \quad (۳)$$

$$\text{VIF}(x_j) < 1, \quad j = 1, 2 \quad (۴)$$

۱۰۵- در رگرسیون افراز شده $y = x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \varepsilon$ ، کدام مورد درست است؟ ($x = (x_1 : x_2)$)

$$\hat{\beta}_1 = (x_1' x_1)^{-1} x_1' y \quad (۱)$$

$$\hat{\beta}_1 = (x' x)^{-1} x' y \quad (۲)$$

$$\hat{\beta}_1 = (x_1' x_1)^{-1} (x_1' y + x_1' x_2 \hat{\beta}_2) \quad (۳)$$

$$\hat{\beta}_1 = (x_1' x_1)^{-1} (x_1' y - x_1' x_2 \hat{\beta}_2) \quad (۴)$$